LOÏC HERVÉ

Étude d'une équation fonctionnelle matricielle

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1989-1990, fascicule 1
« Probabilités », p. 1-68.

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1989-1990___1_1_0>

ETUDE D'UNE EQUATION FONCTIONNELLE MATRICIELLE

HERVE Loïc
I.R.M.A.R. - Université de Rennes I
Laboratoire de Probabilités
Campus de Beaulieu, 35042 RENNES CEDEX

Résumé

Etant donnée une fonction H 2π-périodique, à valeurs dans $\mathcal{M}(d,\mathbb{C})$ ($d \in \mathbb{N}^*$) et vérifiant $H(0)\vec{e_1} = \vec{e_1}$, où nous désignons par $(\vec{e_1},\ldots,\vec{e_d})$ la base canonique de $\mathbb{C}^d$, nous déterminons des critères assurant, tout d'abord que la suite de fonctions matricielles $(\prod_{k=1}^n H(\frac{\cdot}{2^k}))_{n\geq 1}$ converge, puis que les d fonctions $\hat{\phi}_1,\ldots,\hat{\phi}_d$ définies par $\hat{\phi}_i(\lambda) = \lim_{n\to+\infty}\langle\prod_{k=1}^n H(\frac{\lambda}{2^k})\vec{e_i},\vec{e_i}\rangle$ sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}$, et enfin que la famille $\{\phi_i(\cdot-k), i=1,\ldots,d,\ k\in\mathbb{Z}\}$ forme un système de Riesz où l'on a désigné par $\phi_1,\ldots,\phi_d$ les transformées de Fourier inverses des fonctions $\hat{\phi}_1,\ldots,\hat{\phi}_d$. Nous montrons que les critères relatifs aux deux dernières propriétés ci-dessus portent en substance sur le spectre de l'opérateur P_H défini sur l'espace des fonctions 2π-périodiques, à valeurs dans $\mathcal{M}(d,\mathbb{C})$ par $P_H F(\lambda) = H(\frac{\lambda}{2})F(\frac{\lambda}{2})H(\frac{\lambda}{2})^* + H(\frac{\lambda}{2}+\pi)F(\frac{\lambda}{2}+\pi)H(\frac{\lambda}{2}+\pi)^*$. Nous généralisons la notion d'interpolation dyadique en précisant le lien avec l'étude précédente.

1. Introduction

Nous nous proposons de généraliser la notion d'analyse multi-échelle découverte par Y. Meyer et S. Mallat [12], [14]. Rappelons qu'une analyse multi-échelle est la donnée d'une famille de sous-espaces fermés $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ vérifiant :

1. $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} V_n = \{\vec{0}\}$ et $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n} = L^2(\mathbb{R})$.
2. $V_n \subset V_{n+1}$
3. $V_{n+1} = DV_n$ où $Df(x) = f(2x)$
4. $TV_0 = V_0$ où $Tf(x) = f(x-1)$
5. il existe une fonction ϕ dans V_0 telle que le système $\{T^k\phi, k\in\mathbb{Z}\}$ soit une base de Riesz de V_0.

Une telle fonction ϕ est appelée fonction d'échelle. Puisque $V_0 \subset V_1$, il existe une suite $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ telle que

$$\phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)\phi(2x-k) \text{ dans } \mathbb{L}^2(\mathbb{R}). \tag{1}$$

Grâce à la transformée de Fourier, (1) s'écrit encore

$$\hat{\phi}(\lambda) = H(\frac{\lambda}{2})\hat{\phi}(\frac{\lambda}{2}) \tag{2}$$

avec

$$H(\lambda) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)e^{i\lambda k}.$$

Pour construire une analyse multi-échelle, on peut aussi partir de l'égalité (2) considérée alors comme une équation fonctionnelle (la fonction H est évidemment donnée à l'avance). Ce point de vue est explicité dans [2], [3], [6], [12], [14] et est contenu dans la théorie qui va suivre. La généralisation que nous allons entreprendre consiste à déterminer, non plus une seule fonction ϕ, mais plusieurs fonctions $\phi_1, \ldots, \phi_d$ telles que leurs translatés entières engendrent un espace V_0 vérifiant $V_0 \subset DV_0$.

Autrement dit, il s'agit de construire d fonctions réelles $\phi_1, \ldots \phi_d$ (d est un entier arbitrairement fixé) telles que l'on ait, pour chaque entier $i = 1, \ldots, d$

$$\phi_i(x) = \sum_{j=1}^{d}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{i,j}(k)\phi_j(2x-k) \tag{3}$$

où $\{a_{i,j}(n), i,j = 1,\ldots,d\ ;\ n \in \mathbb{Z}\}$ est une famille de complexes vérifiant

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{i,j}(n)|^2 < +\infty \text{ pour } i,j = 1,\ldots,d.$$

Pour tout réel x, nous posons

$$V(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_d(x) \end{pmatrix}$$

et nous définissons, pour tout entier k, les éléments de $\mathcal{M}(d, \mathbf{C}\ )$ donnés par $h(k) = (a_{i,j}(k))_{i,j=1,\ldots,d}$. L'équation (3) s'écrit

$$V(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)V(2x-k). \tag{4}$$

Cette équation fonctionnelle s'écrit en variable de Fourier

$$\hat{V}(\lambda) = H(\frac{\lambda}{2})\hat{V}(\frac{\lambda}{2}), \tag{5}$$

où l'on a posé

$$\hat{V}(\lambda) = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1(\lambda) \\ \vdots \\ \hat{\phi}_d(\lambda) \end{pmatrix}$$

et

$$H(\lambda) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i\lambda k}h(k).$$

Comme dans le cas scalaire, nous serons amenés à étudier les deux cas de figures suivants :

- Les fonctions $\phi_1, \ldots, \phi_d$ vérifiant (3) sont connues à l'avance et appartiennent à $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$: c'est par exemple le cas pour les fonctions issues de l'interpolation (cf. exemple 2 ci-dessous). Nous tenterons alors de prouver que la famille $\{T^k\phi_i, i = 1, \ldots, d;\ k \in \mathbb{Z}\}$ forme un système de Riesz.

- L'autre point de vue consiste à considérer (5) comme une équation fonctionnelle. Dans ce cas, celle-ci appliquée avec $\lambda = 0$ entraîne que $\hat{V}(0)$ est vecteur propre de $H(0)$ pour la valeur propre 1. Par ailleurs (5) itérée n fois assure l'égalité

$$\hat{V}(\lambda) = H(\frac{\lambda}{2})H(\frac{\lambda}{4})\ldots H(\frac{\lambda}{2^n})\hat{V}(\frac{\lambda}{2^n}).$$

Nous utiliserons dans la suite la notation :

$$\prod_{k=1}^{n} H(\frac{\lambda}{2^k}) = H(\frac{\lambda}{2})\ldots H(\frac{\lambda}{2^n}).$$

Si $\hat{V}(0)$ est continue en 0 et si la suite de matrices $\left(\prod_{k=1}^{n} H(\frac{\lambda}{2^k})\right)_{n\geq 1}$ converge vers une matrice notée $H_\infty(\lambda)$, alors $\hat{V}(\lambda) = H_\infty(\lambda)\hat{V}(0)$. Inversement, s'il existe un vecteur $\vec{x}$ non nul invariant par $H(0)$, alors la fonction vectorielle définie par

$$\hat{V}(\lambda) = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1(\lambda) \\ \vdots \\ \hat{\phi}_d(\lambda) \end{pmatrix} = H_\infty(\lambda)\vec{x} \tag{6}$$

est solution de l'équation fonctionnelle (5) et il nous faudra déterminer successivement des conditions sur la fonction matricielle H pour que

(P1) le produit infini de matrices dans (6) converge, auquel cas les fonctions $\hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_d$ seront définies,

(P2) les d fonctions ci-dessus appartiennent à l'espace $L^2(\mathbb{R})$,

(P3) $\{T^k\phi_i, i = 1, \ldots, d;\ k \in \mathbb{Z}\}$ soit un système de Riesz.

Rappelons brièvement les résultats relatifs aux propriétés (P1), (P2) et (P3) du cas scalaire établis dans [2], [3], [5].

- Si H est de classe $\mathcal{C}^{\alpha}(\alpha > 0)$ et vérifie $H(0) = 1$, alors (P1) est vérifiée et la fonction définie par le produit infini est continue sur $\mathbb{R}$ et à décroissance au plus polynômiale. Nous verrons dans le paragraphe 2 que cette propriété s'étend au cadre vectoriel.

- Soit g une fonction de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. La famille composée des translatés entières de g forme un système de Riesz si et seulement si la fonction $\theta(\lambda) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(\lambda+2k\pi)|^2$ (que nous appelerons série scalaire associée à g) vérifie la double inégalité $\frac{1}{c} \leq \theta(\lambda) \leq c$ pour presque tout réel λ, où la constante $c > 0$ est indépendante de λ. Nous généralisons dans le paragraphe 3 ce critère au cas de d fonctions $g_1, \ldots, g_d$.

- Si ϕ appartient à $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ et vérifie (1), alors la série scalaire θ associée à ϕ est invariante sous l'action de l'opérateur défini sur l'espace des fonctions 2π-périodiques par

$$P_H f(\lambda) = u(\frac{\lambda}{2})f(\frac{\lambda}{2}) + u(\frac{\lambda}{2} + \pi)f(\frac{\lambda}{2} + \pi),$$

où $u(\lambda) = |H(\lambda)|^2$. Réciproquement si P_H admet une fonction invariante positive et non nulle en 0, alors la fonction définie par $\hat{\phi}(\lambda) = \prod_{k=1}^{+\infty} H(\frac{\lambda}{2^k})$ appartient à $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Pour prouver cette dernière propriété dans le cas où H est un polynôme trigonométrique, J.-P. Conze montre dans [3] qu'il suffit de vérifier que l'opérateur P_H possède 1 comme plus grande valeur propre positive, avec une fonction propre associée non nulle en 0. Enfin sous certaines hypothèses sur les zéros de H, on montre que la famille constituée des translatés entières de ϕ forme un système de Riesz.

Nous mettons en évidence dans le paragraphe 4 l'analogue de l'opérateur défini ci-dessus mais opérant cette fois sur l'espace des fonctions 2π-périodiques à valeurs dans $\mathcal{M}(d, \mathbf{C})$ puis nous énonçons les résultats concernant les propriétés (P2) et (P3), tout d'abord dans le cas particulier où H est un polynôme trigonométrique à coefficients matriciels (cf. paragraphe 5), puis dans le cas plus général où H est une fonction matricielle de classe $\mathcal{C}^{\alpha}$ (cf. paragraphe 7).

Nous montrerons en substance (plaçons-nous ici dans le cas scalaire pour simplifier), que si la fonction 2π-périodique H est de classe $\mathcal{C}^{\alpha}$ et telle que $\sup_{n\leq 1} \|P_H^n \mathbf{1}\|_{\infty} < +\infty$ où $\mathbf{1}$ est la fonction identiquement égale à 1 sur $\mathbb{R}$ et $\|\cdot\|_{\infty}$ la norme uniforme usuelle, alors la fonction ϕ solution de l'équation fonctionnelle (2) est de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. En outre, la condition ci-dessus sur les opérateurs P_H^n est nécessaire à la propriété (P3) et suffisante à condition d'y adjoindre les hypothèses de nature géométrique énoncées dans [1], [2], [5]. Nous verrons que ces critères s'étendent au cadre vectoriel.

Enfin nous explicitons dans le paragraphe 6 le lien entre l'interpolation dyadique vectorielle et l'équation (5) (cf. exemple 2 ci-dessous). Nous verrons que les résultats établis dans le cas scalaire [4], [7], [10] se généralisent très simplement au cadre vectoriel. Les différents exemples d'interpolation dyadique vectorielle sont inspirés des travaux de J.-L. Merrien [13].

Par commodité, nous avons choisi le cadre dyadique, c'est-à-dire celui de l'équation (5), mais nous verrons dans le paragraphe 3 qu'il existe des exemples vérifiant

$\hat{V}(\lambda) = H(\frac{\lambda}{r})\hat{V}(\frac{\lambda}{r})$ où r est un entier supérieur ou égal à 3.

Exemples

Exemple 1 : Soient ϕ et ψ respectivement les fonctions "père" et "mère" d'une même analyse multi-échelle scalaire $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Rappelons que ϕ et ψ vérifient

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\lambda) &= m_0(\frac{\lambda}{2})\hat{\phi}(\frac{\lambda}{2}) \\ \hat{\psi}(\lambda) &= m_1(\frac{\lambda}{2})\hat{\phi}(\frac{\lambda}{2})\end{aligned}$$

où $m_1(\lambda) = e^{-i\lambda}\overline{m_0(\lambda+\pi)}$ (nous nous plaçons ici dans le cas où $\{\phi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de V_0). Nous reprenons les notations vues précédemment en identifiant ϕ et ϕ_1, puis ψ et ϕ_2, de sorte que

$$\hat{V}(\lambda) = H(\frac{\lambda}{2})\hat{V}(\frac{\lambda}{2}),$$

avec

$$H(\lambda) = \begin{pmatrix} m_0(\lambda) & 0 \\ m_1(\lambda) & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que

$$\prod_{k=1}^{+\infty} H(\frac{\lambda}{2^k}) = \begin{pmatrix} \prod_{k=1}^{+\infty} m_0(\frac{\lambda}{2^k}) & 0 \\ m_1(\frac{\lambda}{2})\prod_{k=1}^{+\infty} m_0(\frac{\lambda}{2\cdot 2^k}) & 0 \end{pmatrix},$$

et la solution donnée par (6) avec ici $\vec{x} = \vec{e_1}$ est

$$\hat{V}(\lambda) = \begin{pmatrix} \hat{\phi}(\lambda) \\ \hat{\psi}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Notons que l'espace engendré par la famille $\{T^k\phi, T^k\psi, k \in \mathbb{Z}\}$ n'est autre que l'espace V_1.

Evidemment, ce type d'exemples ne peut motiver la généralisation du cas scalaire au cadre matriciel. Toutefois ce cadre apparaît naturellement dans la théorie d'interpolation d'ordre supérieur à 1 qui consiste, pour simplifier, à déterminer par exemple deux fonctions ϕ_1 et ϕ_2 vérifiant pour tout entier k

$$\phi_1(k) = \delta_{0,k} \ ; \ (\phi_1)'(k) = 0 \ ; \ (\phi_2)(k) = 0 \ ; \ (\phi_2)'(k) = \delta_{0,k}.$$

Si le système $\{T^k\phi_1, T^k\phi_2, k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base de Riesz dans l'espace V_0 qu'il engendre, alors toute fonction dans V_0 s'écrit

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)T^k\phi_1 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} f'(k)T^k\phi_2.$$

Nous étudierons le cas où les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 vérifient une équation de type (3) (avec $d = 2$ ici) en explicitant dans le paragraphe 6 le lien entre analyse multi-échelle et interpolation dyadique. Voici un premier exemple de ce type.

Exemple 2 : Interpolation d'Hermite

Etant donné un entier $r \geq 1$, désignons par E (sous entendu $E(r)$) l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^{r-1}$ sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à chaque intervalle $[k, k+1]$ $(k \in \mathbb{Z})$ coïncide avec un polynôme de degré $\leq 2r - 1$. Nous utiliserons la notation :

$$\vec{\Delta} f = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ \vdots \\ f^{(r-1)} \end{pmatrix}.$$

A tout élément de E correspond la suite $(\vec{\Delta} f(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^r$ et réciproquement, à toute suite $(\vec{A}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^r$ correspond une et une seule fonction f dans E vérifiant $\vec{\Delta} f(k) = \vec{A}(k)$ pour chaque entier k. Le second point résulte de l'existence et l'unicité de l'interpolation d'Hermite sur chaque intervalle $[k, k+1]$. En particulier pour chaque entier $i = 0, \ldots, r-1$, il existe une unique fonction ϕ_i dans E vérifiant $\vec{\Delta} \phi_i(k) = \delta_{0,k} \vec{e_i}$. Il est clair que ces fonctions sont à support compact contenu dans $[-1, 1]$ et par unicité de l'interpolation d'Hermite, toute fonction dans E s'écrit

$$f(x) = \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f^{(j)}(k) \phi_j(x-k), \tag{7}$$

la série ci-dessus étant pour x fixé une somme finie. Les fonctions ϕ_i sont appelées *fonctions principales.* La fonction $x \rightarrow f(\frac{x}{2})$ (pour $f \in E$) est elle-même élément de E. Cette remarque (appliquée aux fonctions ϕ_i) et l'identité (7) entraînent l'égalité :

$$\phi_i(\frac{x}{2}) = \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-j} \phi_i^{(j)}(\frac{k}{2}) \phi_j(x-k), \ \forall i = 0, \ldots, r-1. \tag{8}$$

Ainsi, les fonctions principales vérifient une équation du type (3). Définissons à présent le sous-espace V_0 de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ engendré par le système $\{T^k \phi_i, i = 0, \ldots, r-1, \ k \in \mathbb{Z}\}$. Si $r = 1$, nous retrouvons l'espace classique des splines linéaires [14] et ϕ_0 n'est autre que la fonction triangle (cf. Ex. 3 du §7). Dans ce cas, la famille composée des translatés entières de ϕ_0 forme une base de Riesz de V_0. Nous généraliserons ce résultat au cas $r = 2$ et $r = 3$, à savoir : dans les deux cas, la famille constituée des translatés entières des fonctions principales forme une base de Riesz dans V_0. Enfin, plaçons-nous dans le cas $r = 2$ et considérons une fonction quelconque f de E : l'égalité (7) entraîne

$$f'(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \phi_0'(x-k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} f'(k) \phi_1'(x-k).$$

Soit s un entier positif quelconque : puisque $D^{-s} E \subset E$, nous pouvons appliquer la formule (7) et la précédente à la fonction $x \rightarrow f(2^{-s} x)$. Appliquant ceci avec

$x = n + \frac{1}{2}$ ($n \in \mathbb{Z}$) et utilisant l'identité (8), nous montrerons dans le paragraphe 6 qu'il existe deux matrices $M(0)$ et $M(-1)$ dans $\mathcal{M}(2, \mathbb{R})$ telles que

$$\vec{\Delta f}(2^{-s}n + 2^{-(s+1)}) = A^{-(s+1)}M(0)A^s\vec{\Delta f}(2^{-r}n) + A^{-(s+1)}M(-1)A^s\vec{\Delta f}(2^{-r}(n+1)),$$

où $A = \mathrm{diag}(1, \frac{1}{2})$.

(Nous reviendrons en détail sur les calculs précédents dans le paragraphe 6).

Ainsi, la notion d'interpolation dyalique au sens défini dans [7] s'étend au cadre matriciel : la formule ci-dessus permet, partant des données de f et f' sur le réseau $\mathbb{Z}$, de calculer les fonctions f et f' en tous les points dyadiques. Cette généralisation est inspirée des travaux de J.-L. Merrien [13].

2. Convergence du produit infini de matrices

Toute fonction à valeurs dans $\mathcal{M}(d, \mathbb{C})$ sera appelée dans la suite fonction matricielle.

Nous notons $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_d})$ la base canonique de $\mathbb{C}^d$, puis $\|\cdot\|_2$ la norme hermitienne sur $\mathbb{C}^d$ et $|\cdot|_2$ la norme matricielle associée, à savoir :

$$|N|_2 = \sup_{\|\vec{x}\|_2=1} \|N\vec{x}\|_2 \text{ pour } N \in \mathcal{M}(d, \mathbb{C}).$$

Nous dirons qu'une fonction matricielle 2π-périodique $\lambda \to H(\lambda) = (a_{i,j}(\lambda))_{i,j=1,\ldots,d}$ est de classe $\mathcal{C}^\alpha (0 < \alpha \leq 1)$ si les d^2 fonctions scalaires $a_{i,j}$ sont de classe $\mathcal{C}^\alpha$ sur $[0, 2\pi]$, ou encore (ce qui est équivalent) si H vérifie la condition suivante :

$$\sup\{\frac{|H(x) - H(y)|_2}{|x-y|^\alpha}, x, y \in [0, 2\pi], x \neq y\} < +\infty.$$

Lemme 2.1. *Si H est une fonction matricielle de classe $\mathcal{C}^\alpha (\alpha > 0)$ telle qu'il existe une matrice M dans $GL(d, \mathbb{C})$ vérifiant $M^{-1}H(0)M = \mathrm{diag}(1, \mu_2, \ldots, \mu_d)$ avec $|\mu_i| < 1$ ou $\mu_i = 1$, alors, la suite $\left(\prod_{k=1}^{n} H(\frac{\lambda}{2^k})\right)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ vers une fonction matricielle continue que nous noterons H_∞. Si $\mu_i \neq 1$, alors $H_\infty(\lambda)M\vec{e_i} = \vec{0}$.*

Démonstration du lemme (2.1.) : Posons $G(\lambda) = M^{-1}H(\lambda)M$. Il est clair que G est aussi de classe $\mathcal{C}^\alpha$ et on a $\prod_{k=1}^n H(\frac{\lambda}{2^k}) = M\prod_{k=1}^n G(\frac{\lambda}{2^k})M^{-1}$, de sorte que les produits infinis relatifs à H et G convergent ou divergent en même temps, avec à la limite $H_\infty(\lambda) = MG_\infty(\lambda)M^{-1}$. Nous montrons maintenant que la suite $\left(\prod_{k=1}^{n} G(\frac{\cdot}{2^k})\right)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$. Notons que $|G(0)|_2 = 1$, d'où $|\,|G(\lambda)|_2 - 1| \leq c|\lambda|^\alpha$. Soit $A > 0$ arbitrairement fixé. Alors, pour tout réel $\lambda \in [-A, A]$, nous obtenons

$$\left|\log|G(\frac{\lambda}{2^k})|_2\right| \underset{k\to+\infty}{\sim} \left||G(\frac{\lambda}{2^k})|_2 - 1\right| \leq \frac{cA}{2^{\alpha k}}$$

Ceci prouve la convergence uniforme sur $[-A, A]$ de la série $\sum_{k\geq 1}\left|\log|G(\frac{\lambda}{2^k})|_2\right|$, ou encore, celle du produit infini $\prod_{k=1}^{+\infty}|G(\frac{\lambda}{2^k})|_2$. Définissons maintenant, pour tout entier n, les fonctions $\alpha_{i,j}^n(i,j=1,\ldots,d)$ par

$$\alpha_{i,j}^n(\lambda)=\langle\prod_{k=1}^{n}G(\frac{\lambda}{2^k})\vec{e}_j,\vec{e}_i\rangle.$$

Pour $q>p$, nous écrivons :

$$\alpha_{i,j}^q(\lambda)=\langle\prod_{k=p+1}^{q}G(\frac{\lambda}{2^k})\vec{e}_j,\left(\prod_{k=1}^{p}G(\frac{\lambda}{2^k})\right)^*\vec{e}_i\rangle,$$

et

$$\alpha_{i,j}^p(\lambda)=\langle\vec{e}_j,\left(\prod_{k=1}^{p}G(\frac{\lambda}{2^k})\right)^*\vec{e}_i\rangle.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans $\mathbb{C}^{\,d}$, nous obtenons (par convention $\mu_1=1$)

$$\begin{aligned}|\alpha_{i,j}^q(\lambda)-\mu_j^{q-p}\alpha_{i,j}^p(\lambda)| &\leq \|\left(\prod_{k=1}^{p}G(\frac{\lambda}{2^k})\right)^*\vec{e}_i\|_2\times\|\prod_{k=p+1}^{q}G(\frac{\lambda}{2^k})\vec{e}_j-\mu_j^{q-p}\vec{e}_j\|_2\\ &\leq c\|\prod_{k=p+1}^{q}G(\frac{\lambda}{2^k})\vec{e}_j-\mu_j^{q-p}\vec{e}_j\|_2\end{aligned}$$

où la constante $c>0$ est indépendante du réel $\lambda\in[-A,A]$. Or,

$$\begin{aligned}\prod_{k=p+1}^{q}G(\frac{\lambda}{2^k})\vec{e}_j-\mu_j^{q-p}\vec{e}_j &= \prod_{k=p+1}^{q}G(\frac{\lambda}{2^k})\vec{e}_j-\mu_j\prod_{k=p+1}^{q-1}G(\frac{\lambda}{2^k})\vec{e}_j\\ &+\mu_j\left(\prod_{k=p+1}^{q-1}G(\frac{\lambda}{2^k})\vec{e}_j-\mu_j\prod_{k=p+1}^{q-2}G(\frac{\lambda}{2^k})\vec{e}_j\right)\\ &\vdots\\ &+\mu_j^{q-p-2}\left(G(\frac{\lambda}{2^{p+1}})G(\frac{\lambda}{2^{p+2}})\vec{e}_j-\mu_jG(\frac{\lambda}{2^{p+1}})\vec{e}_j\right)\\ &+\mu_j^{q-p-1}\left(G(\frac{\lambda}{2^{p+1}})\vec{e}_j-\mu_j\vec{e}_j\right)\\ &=\left(\prod_{k=p+1}^{q-1}G(\frac{\lambda}{2^k})\right)\left(G(\frac{\lambda}{2^q})\vec{e}_j-\mu_j\vec{e}_j\right)\\ &+\mu_j\left(\prod_{k=p+1}^{q-2}G(\frac{\lambda}{2^k})\right)\left(G(\frac{\lambda}{2^{q+1}})\vec{e}_j-\mu_j\vec{e}_j\right)\\ &\vdots\\ &+\mu_j^{q-p-2}G(\frac{\lambda}{2^{p+1}})\left(G(\frac{\lambda}{2^{p+2}})\vec{e}_j-\mu_j\vec{e}_j\right)\\ &+\mu_j^{q-p-1}\left(G(\frac{\lambda}{2^{p+1}})\vec{e}_j-\mu_j\vec{e}_j\right)\end{aligned}$$

Pour $N \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, nous avons quand $m \geq n \geq N$

$$0 \leq \prod_{k=n}^{m} |G(\frac{\lambda}{2^k})|_2 \leq e^1, \ \ \forall \lambda \in [-A, A].$$

Désignons par $(g_{i,j}(\lambda))_{i,j=1,\ldots,d}$, les coefficients de la matrice $G(\lambda)$.Pour $q > p \geq N$, nous obtenons finalement

$$\begin{aligned}
\| \prod_{k=p+1}^{q} G(\frac{\lambda}{2^k})\vec{e}_j - \mu_j^{q-p}\vec{e}_j\|_2 &\leq e \sum_{k=p+1}^{q} \|G(\frac{\lambda}{2^k})\vec{e}_j - \mu_j\vec{e}_j)\|_2 \\
&\leq e \sum_{k=p+1}^{q} \sqrt{|g_{j,j}(\frac{\lambda}{2^k}) - \mu_j|^2 + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{d} |g_{i,j}(\frac{\lambda}{2^k})|^2}
\end{aligned}$$

Par hypothèse, $g_{i,j}(0) = \mu_j \times \delta_{i,j}$ et les fonctions $g_{i,j}$ sont de classe C^α, d'où pour tout réel $\lambda \in [-A, A]$

$$|g_{j,j}(\frac{\lambda}{2^k}) - \mu_j|^2 + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{d} |g_{i,j}(\frac{\lambda}{2^k})|^2 \leq \frac{cA^2}{2^{2\alpha k}}.$$

Par conséquent, pour tout réel $\varepsilon > 0$ arbitrairement fixé, nous pouvons choisir un entier N suffisamment grand pour que

$$\forall q > p \geq N, \ \forall \lambda \in [-A, A], \ |\alpha_{i,j}^q(\lambda) - \mu_j^{q-p}\alpha_{i,j}^p(\lambda)| \leq \varepsilon/2$$

d'où,

$$\begin{aligned}
|\alpha_{i,j}^q(\lambda) - \alpha_{i,j}^p(\lambda)| &\leq |\alpha_{i,j}^q(\lambda) - \mu_j^{q-N}\alpha_{i,j}^N(\lambda)| + |\alpha_{i,j}^p(\lambda) - \mu_j^{p-N}\alpha_{i,j}^N(\lambda)| \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

La propriété de Cauchy dans $\mathbf{C}$ assure que la suite $(\alpha_{i,j}^n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[-A, A]$ vers une fonction $\alpha_{i,j}^\infty$ vérifiant (par passage à la limite) $\alpha_{i,j}^\infty(\lambda) = \mu_j^\infty \alpha_{i,j}^\infty(\lambda)$ où $\mu_j^\infty = \lim_{n\to+\infty} \mu_j^n$. Si $\mu_j \neq 1$, alors la fonction $\alpha_{i,j}^\infty$ est nulle pour chaque entier $i = 1, \ldots, d$. Le lemme est finalement démontré. □

Remarques (H vérifie les hypothèses du lemme 2.1)

1. Evidemment, la convergence du produit infini $\prod_{k=1}^{+\infty} H(\frac{\lambda}{2^k})$, ou encore l'existence des fonctions $\hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_d$ données par (6) est loin d'entraîner la propriété (P2). Cependant, comme dans le cas scalaire (cf.[3]), les solutions $\hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_d$ sont des fonctions à croissance au plus polynômiale sur $\mathbb{R}$.

   En effet, pour tout réel λ et tout entier $n \geq 1$, nous pouvons écrire

   $$\|\hat{V}(\lambda)\|_2 \leq \prod_{k=1}^{n} |H(\frac{\lambda}{2^k})|_2 \|\hat{V}(\frac{\lambda}{2^n})\|_2.$$

   Posons $M = \sup_{\lambda\in[-\pi,\pi]} |H(\lambda)|_2$ et $c = \sup_{\lambda\in[-\pi,\pi]} \|\hat{V}(\lambda)\|_2$ ($c < +\infty$ car $\lambda \to \hat{V}(\lambda)$ est continue sur $[-\pi, \pi]$). Pour λ fixé dans $\mathbb{R}$, nous définissons le plus petit entier $\ell(\lambda)$ tel que $\left|\frac{\lambda}{2^{\ell(\lambda)}}\right| \leq \pi$ (c'est-à-dire $\ell(\lambda) = \left[\log_2(\frac{|\lambda|}{\pi})\right] + 1$). L'inégalité ci-dessus appliquée avec $n = \ell(\lambda) - 1$ entraîne finalement que $\|\hat{V}(\lambda)\|_2 \leq cM^{\ell(\lambda)-1} \leq c'|\lambda|^{\log_2 M}$.

2. Par ailleurs, si H est un polynôme trigonométrique à coefficients dans $\mathcal{M}(d, \mathbb{C})$, à savoir
$$H(\lambda) = \sum_{k=p}^{q} e^{i\lambda k} h(k), \quad h(k) \in \mathcal{M}(d, \mathbb{C}),$$
alors les distributions $\phi_1, \ldots, \phi_d$ définies comme transformées de Fourier inverses des distributions $\hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_d$, sont à support compact contenu dans $[p, q]$.

En effet, quitte à considérer la fonction G (cf. ci-dessus)au lieu de H, on peut supposer que $H(0)\vec{e_1} = \vec{e_1}$. Nous considérons ici la solution de (5) définie par (6) avec $\vec{x} = \vec{e_1}$. Soit T la transformation définie sur l'espace $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^d)$ par
$$TF(x) = \sum_{n=p}^{q} h(n) F(2x - n).$$
Pour
$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^d),$$
nous noterons
$$\hat{F} = \begin{pmatrix} \hat{f}_1 \\ \vdots \\ \hat{f}_d \end{pmatrix}.$$
Ceci étant posé, nous obtenons facilement $\widehat{TF}(\lambda) = H(\frac{\lambda}{2})\hat{F}(\frac{\lambda}{2})$, d'où, $\widehat{T^n F}(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} H(\frac{\lambda}{2^k})\hat{F}(\frac{\lambda}{2^n})$. Fixons maintenant une fonction F dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^d)$ continue, vérifiant $\operatorname{supp} F \subset [p, q]$ et $\hat{F}(0) = \vec{e}_1$. D'une part il est clair que TF et plus généralement $T^n F (n \geq 1)$ sont des fonctions continues, à support compact contenu dans $[p, q]$. D'autre part on a $\lim_{n \to +\infty} \widehat{T^n F}(\lambda) = \hat{V}(\lambda)$, de sorte que $(T^n F)_{n \geq 1}$ converge au sens des distributions vers
$$V = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_d \end{pmatrix}$$
qui, par passage à la limite vérifie $\operatorname{supp} V \subset [p, q]$.

3. Etude des familles composées des translatés entières de plusieurs fonctions

Etant données d fonctions quelconques $g_1, \ldots, g_d$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, nous nous proposons dans ce paragraphe de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la famille $\{T^k g_i, i = 1 \ldots, d,\ k \in \mathbb{Z}\}$ forme un sytème de Riesz, puis d'étudier le système de Riesz dual de ce dernier ainsi qu'un procédé d'orthonormalisation. Enfin nous présentons dans le paragraphe 3.3 quelques applications dont l'une aux espaces de fonctions splines.

3.1. Système de Riesz

Rappelons tout d'abord la définition d'un système de Riesz dans un espace d'Hilbert.

Un système $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ de vecteurs d'un espace de Hilbert X est appelé système de Riesz si il existe une constante $c > 0$ telle que l'on ait, pour toute famille finie de scalaires $\{a_n, n \in \mathbb{Z}\}$,

$$\frac{1}{c}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq \|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n\|_X^2 \leq c \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2. \tag{9}$$

Dans le cas scalaire, nous disposons du résultat suivant (cf.[14]) :

Si g est une fonction de carré intégrable sur $\mathbb{R}$, alors $\{T^k g, k \in \mathbb{Z}\}$ est un système de Riesz si et seulement si il existe une constante $c > 0$ telle que l'on ait, pour presque tout réel λ, $\frac{1}{c} \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(\lambda + 2k\pi)|^2 \leq c$. Notons que la fonction $\lambda \to \theta(\lambda)$ donnée par la série ci-dessus et appelée dans la suite *série scalaire associée à la fonction g* définit une fonction intégrable sur $[0, 2\pi]$. En effet, un changement de variable évident entraîne $\int_0^{2\pi} \theta(\lambda)d\lambda = \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\lambda)|^2 d\lambda$. Par ailleurs la fonction θ est périodique, de période 2π. De même, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz, si σ et δ sont deux fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $\lambda \to \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sigma(\lambda+2k\pi)\overline{\delta(\lambda + 2k\pi)}$ appartient à $L^1(0, 2\pi)$.

Définition. Soit d fonctions $g_1, \ldots, g_d$ de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ et notons $C(\lambda)$ la matrice d'ordre d dont les coefficients sont donnés par

$$c_{i,j}(\lambda) = \hat{g}_i(\lambda)\overline{\hat{g}_j(\lambda)},\ i, j = 1, \ldots, d.$$

D'après ce qui précède, la série matricielle $\lambda \to \theta(\lambda) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} C(\lambda + 2k\pi)$ est définie pour presque tout réel λ et sera appelée *série matricielle associée aux fonctions $g_1, \ldots, g_d$.*

Posons

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{g}_1 \\ \vdots \\ \hat{g}_d \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Un calcul évident prouve que $C(\lambda) = \hat{A}(\lambda)\hat{A}(\lambda)^*$, de sorte que $C(\lambda)$ est hermitienne, positive. Par conséquent pour presque tout réel λ, $\theta(\lambda)$ est hermitienne, positive, comme limite croissante de matrices hermitiennes positives.

Proposition 3.1. *Soit $g_1, \ldots, g_d \in L^2(\mathbb{R})$ et $\lambda \to \theta(\lambda)$ la série matricielle associée. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

$$\{T^k g_i, i = 1, \ldots, d;\ k \in \mathbb{Z}\} \text{ est un système de Riesz} \tag{11}$$

Il existe une constante $c > 0$ telle que l'on ait, pour presque tout réel λ,

$$\frac{1}{c}Id \leq \theta(\lambda) \leq cId. \tag{12}$$

Id est la matrice identité dans $\mathcal{M}(d, \mathbf{C}\ )$ et l'inégalité ci-dessus est à considérer au sens de la relation d'ordre usuelle sur les matrices hermitiennes, à savoir

$$A \leq B \Leftrightarrow \langle A\vec{x}, \vec{x}\rangle \leq \langle B\vec{x}, \vec{x}\rangle, \forall \vec{x} \in \mathbf{C}^{\ d}.$$

Application.

Soient $g_1, \ldots, g_d$ d fonctions de carré intégrable sur $I\!R$ et $\hat{A}$ la fonction vectorielle définie par (10). Considérons alors une fonction matricielle M, 2π-périodique et posons

$$\hat{X}(\lambda) = M(\lambda)\hat{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} \hat{f}_1(\lambda) \\ \vdots \\ \hat{f}_d(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Il est clair que s'il existe une constante $c > 0$ telle que l'on ait, pour presque tout réel λ, $|M(\lambda)|_2 \leq c$, alors les fonctions $\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_d$ sont de carré intégrable sur $I\!R$.

Corollaire 3.2. *Si la famille constituée des translatés entières des d fonctions $g_1, \ldots, g_d$ forme un système de Riesz et s'il existe une constante $c > 0$ telle que l'on ait, pour presque tout réel λ,*

$$\frac{1}{c}Id \leq M(\lambda)M(\lambda)^* \leq c\,Id,$$

alors la famille $\{T^k f_i, i = 1, \ldots, d\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$ est un système de Riesz.

Ceci résulte de la proposition 3.1 et de l'identité évidente

$$\gamma(\lambda) = M(\lambda)\theta(\lambda)M(\lambda)^* \ \text{pp}, \tag{13}$$

où nous avons désigné par θ et γ les séries matricielles associées respectivement aux fonctions $g_1, \ldots, g_d$ et $f_1, \ldots, f_d$.

Démonstration de la Proposition (3.1.) :

Nous reprenons les techniques du cas scalaire établies dans [14].

Lemme 3.3. *Soit $\{a_k^1, \ldots, a_k^d, k \in \mathbb{Z}\}$ une famille finie de scalaires. On a*

$$\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{d} a_k^i T^k g_i \|_{L^2(I\!R)}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \langle \overline{\theta(\lambda)}\vec{x}(\lambda), \vec{x}(\lambda)\rangle d\lambda,$$

où

$$\vec{x}(\lambda) = \begin{pmatrix} a^1(\lambda) \\ \vdots \\ a^d(\lambda) \end{pmatrix}$$

et

$$a^i(\lambda) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a^i_k e^{i\lambda k} \; pour\; i = 1,\dots,d.$$

En effet, reprenant les notations établies ci-dessus, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\langle\overline{\theta(\lambda)}\vec{x}(\lambda),\vec{x}(\lambda)\rangle d\lambda &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle\overline{C(\lambda+2\pi)}\vec{x}(\lambda),\vec{x}(\lambda)\rangle d\lambda\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\langle\overline{C(\lambda)}\vec{x}(\lambda),\vec{x}(\lambda)\rangle d\lambda\end{aligned}$$

car $\lambda \longrightarrow \vec{x}(\lambda)$ est 2π-périodique. En outre, on a

$$\begin{aligned}\langle\overline{C(\lambda)}\vec{x}(\lambda),\vec{x}(\lambda)\rangle &= \sum_{i=1}^d \overline{a^i(\lambda)}\sum_{j=1}^d \hat{g}^j(\lambda)\overline{\hat{g}^i(\lambda)}a^j(\lambda)\\ &= \left|\sum_{j=1}^d a_j(\lambda)\hat{g}^j(\lambda)\right|^2\end{aligned}$$

et la formule de Plancherel assure l'égalité

$$\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1}^d a^i_k T^k g_i\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left|\sum_{j=1}^d a_j(\lambda)\hat{g}^j(\lambda)\right|^2 d\lambda$$

Le lemme est ainsi prouvé.

Démontrons que (12)⇒(11).

Le lemme, adjoint à la propriété (12) entraîne

$$\frac{1}{c2\pi}\int_0^{2\pi}\|\vec{x}(\lambda)\|_2^2 d\lambda \le \|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1}^d a^i_k T^k g_i\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \le \frac{c}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|\vec{x}(\lambda)\|^2 d\lambda.$$

Or on a $\|\vec{x}(\lambda)\|_2^2 = \sum_{i=1}^d |a^i(\lambda)|^2$ et, grâce à la formule de Plancherel (cette fois dans $L^2(0,2\pi)$), nous obtenons finalement la double inégalité(9).

Réciproquement, supposons (11) et posons

$$\mu(\lambda) = \inf_{\|\vec{x}\|_2=1}\langle\overline{\theta(\lambda)}\vec{x},\vec{x}\rangle.$$

Puisque $\overline{\theta(\lambda)}$ est hermitienne, $\mu(\lambda)$ est une valeur propre de $\overline{\theta(\lambda)}$. Pour chaque réel λ, nous choisissons un vecteur propre

$$\vec{Z}(\lambda) = \begin{pmatrix} x_1(\lambda)\\ \vdots\\ x_d(\lambda)\end{pmatrix}$$

de $\overline{\theta(\lambda)}$, relatif à la valeur propre $\mu(\lambda)$ et tel que $\|\vec{Z}(\lambda)\|_2 = 1$. Il est possible de choisir l'application $\lambda \longrightarrow \vec{Z}(\lambda)$ 2π-périodique car θ est 2π-périodique.

Posons $m_N(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{N-1} e^{i\lambda k}$, $K_N(\lambda) = |m_N(\lambda)|^2$ (*noyau de Fejer*), puis $\vec{Z}_N(\lambda) = m_N(\lambda-\lambda_0)\vec{Z}(\lambda)$, où λ_0 est un réel arbitrairement fixé. Puisque par hypothèse on a

$$\sum_{i=1}^{d} |x_i(\lambda)|^2 = 1, \tag{14}$$

les d fonctions $\lambda \to m_N(\lambda - \lambda_0)x_i(\lambda)$ pour $i = 1, \ldots, d$ appartiennent à $L^2(0, 2\pi)$. Notons respectivement $(c_k^i)_{k\in\mathbb{Z}}$ les coefficients de Fourier des d fonctions définies ci-dessus, c'est-à-dire

$$m_N(\lambda - \lambda_0)\hat{Z}(\lambda) = \begin{pmatrix} \sum_k \; c_k^1 \; e^{i\lambda k} \\ \vdots \\ \sum_k \; c_k^d \; e^{i\lambda k} \end{pmatrix}.$$

Ceci étant posé, nous appliquons le lemme avec $\vec{x}(\lambda) = \hat{Z}_N(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{d} c_k^i T^k g_i \right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |m_N(\lambda - \lambda_0)|^2 \mu(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_N(\lambda - \lambda_0)\mu(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \tag{15}$$

La propriété (9) assure la double inégalité

$$\frac{1}{c} \sum_{i=1}^{d} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k^i|^2 \leq \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{d} c_k^i T^k \phi_i \right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq c \sum_{i=1}^{d} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k^i|^2. \tag{16}$$

Or, par définition des coefficients $(c_k^i)_{k\in\mathbb{Z}}$, nous obtenons

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k^i|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |m_N(\lambda - \lambda_0)|^2 |x_i(\lambda)|^2 d\lambda.$$

En utilisant à nouveau l'égalité (14), nous pouvons conclure de (15) et (16) que

$$\frac{2\pi}{c} \int_0^{2\pi} K_N(\lambda - \lambda_0) d\lambda \leq \int_0^{2\pi} K_N(\lambda - \lambda_0)\mu(\lambda) d\lambda \leq c2\pi \int_0^{2\pi} K_N(\lambda - \lambda_0) d\lambda.$$

Rappelons que la suite $(K_N)_{N\geq 1}$ est une identité approchée. Par ailleurs, la fonction μ est intégrable sur $[0, 2\pi]$ car $\mu(\lambda) \leq \langle\theta(\lambda)\vec{e}_1, \vec{e}_1\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{g}_1(\lambda + 2k\pi)|^2$. Par passage à la limite dans la double inégalité ci-dessus, on conclut que l'inégalité $\frac{2\pi}{c} \leq \mu(\lambda_0) \leq 2\pi c$ est vérifiée pour presque tout réel λ_0. La même démonstration appliquée à $\nu(\lambda) = \sup_{\|\vec{x}\|_2 = 1} \overline{\langle\theta(\lambda)\,\vec{x}, \vec{x}\rangle}$ assure finalement la propriété (12) et la proposition est ainsi démontrée. □

3.2. Base duale et orthonormalisation

Si $\{e_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ forme une base de Riesz d'un espace de Hilbert X, alors il existe une base duale de Riesz associée, c'est-à-dire un système $\{f_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ de vecteurs de X formant une base de Riesz dans X et vérifiant $\langle e_n, f_m\rangle_{X\times X} = \delta_{n,m}\quad (n, m \in \mathbb{Z})$. Par ailleurs tout élément x de X s'écrit (au sens de la convergence dans X) $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle x, f_n\rangle e_n$.

Considérons à présent d fonctions $g_1, \ldots, g_d$ et supposons que la famille composée des translatés entières de ces d fonctions forme un système de Riesz. Nous allons montrer que le système dual associé est lui-même composé des translatés entières de d fonctions $\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_d$. Définissons pour cela le sous-espace E de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ engendré par le système $\{T^k g_i, i = 1, \ldots, d,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et considérons la fonction vectorielle $\hat{A}$ donnée par (10). D'après la propriété (12), les matrices $\theta(\lambda)$ sont inversibles pour presque tout réel λ. Ceci permet de définir les fonctions vectorielles

$$\hat{B}(\lambda) = \theta^{-1}(\lambda)\hat{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} \hat{\tilde{g}}_1(\lambda) \\ \vdots \\ \hat{\tilde{g}}_d(\lambda) \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$\hat{C}(\lambda) = \theta^{-1/2}(\lambda)\hat{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1(\lambda) \\ \vdots \\ \hat{\sigma}_d(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{18}$$

La théorie des matrices hermitiennes assure les deux propriétés suivantes

$$\frac{1}{c} Id \leq \theta(\lambda)^{-1} \leq c\, Id \qquad pp \tag{19}$$

et

$$c^{-1/2} Id \leq \theta(\lambda)^{-1/2} \leq c^{1/2}\, Id \qquad pp. \tag{20}$$

Proposition 3.4. *Les fonctions $\hat{\tilde{g}}_i$ et $\hat{\sigma}_i$ $(i = 1, \ldots, d)$ sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ et les fonctions $\tilde{g}_i$ et σ_i, définies comme transformées de Fourier inverses des précédentes, appartiennent à E. La famille $\{T^k \tilde{g}_i, i = 1, \ldots, d\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$ est la base de Riesz duale de $\{T^k g_i, i = 1, \ldots, d\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$ dans E et le système $\{T^k \sigma_i, i = 1, \ldots, d\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormée de E.*

Démonstration Il est clair que les fonctions $\tilde{g}_i$ et σ_i pour $i = 1, \ldots, d$ sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. Désignons maintenant par $(t_{i,j}(\lambda))_{i,j=1,\ldots,d}$ les coefficients de la matrice $\theta(\lambda)^{-1}$. Les fonctions $t_{i,j}$ sont 2π-périodiques et bornées d'après (19). Ceci étant posé, nous obtenons que $\theta(\lambda)^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i\lambda k} M(k)$ dans $\mathbb{L}^2(0, 2\pi)$, où l'on a posé $M(k) = (m_k(i,j))_{i,j=1,\ldots,d}$ avec $m_k(i,j) = \int_0^{2\pi} t_{i,j}(\lambda) e^{-i\lambda k} d\lambda$. Ainsi, on a $\hat{B}(\lambda) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i\lambda k} M(k) \hat{A}(\lambda)$, c'est-à-dire pour $i = 1, \ldots, d$,

$$\hat{\tilde{g}}_i(\lambda) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i\lambda k} \sum_{j=1}^{d} m_k(i,j) \hat{g}_j(\lambda). \tag{21}$$

Puisque $\sum_{j=1}^{d}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |m_k(i,j)|^2 < +\infty$, la série $\sum_{j=1}^{d}\sum_{k\in\mathbb{Z}} m_k(i,j)T^k g_j$ converge dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ et plus précisément vers la fonction $\tilde{g}_i$ d'après (21). On procède de la même façon pour les fonctions σ_i en utilisant (20).

La propriété (19) et le corollaire 3.2. assurent que la famille composée des translatés entières des fonctions $\tilde{\phi}_1, \ldots, \tilde{\phi}_d$ forme un système de Riesz. Plus précisément (cf. (13)), la série matricielle $\tilde{\theta}$ associée aux fonctions $\tilde{\phi}_i$ vérifie $\tilde{\theta}(\lambda) = \theta(\lambda)^{-1}$ pp.

Prouvons à présent la biorthogonalité des deux systèmes. D'après la formule sommatoire de Poisson, nous devons démontrer les identités suivantes :

$$d_{i,j}(\lambda) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\tilde{g}}_i(\lambda + 2k\pi)\overline{\hat{g}_j(\lambda + 2k\pi)} = \delta_{i,j}, \ \forall i,j = 1,\ldots,d.$$

Or, la famile $\{d_{i,j}(\lambda), i,j = 1,\ldots,d\}$ n'est autre que celle des coefficients de la matrice donnée par $\Delta(\lambda) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{B}(\lambda + 2k\pi)\hat{A}(\lambda + 2k\pi)^*$, c'est-à-dire, grâce à (17), par $\Delta(\lambda) = \theta^{-1}(\lambda)\theta(\lambda) = Id$, ce qui prouve les identités désirées.

De même, la série matricielle γ associée aux fonctions σ_i est donnée par

$$\begin{aligned} \gamma(\lambda) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{C}(\lambda + 2k\pi)\hat{C}(\lambda + 2k\pi)^* \\ &= \theta^{-1/2}(\lambda)\theta(\lambda)\theta^{-1/2}(\lambda) \\ &= Id. \end{aligned}$$

Ceci assure l'orthogonalité du système $\{T^k\sigma_i, i = 1,\ldots,d \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$ (grâce à la formule sommatoire de Poisson). Démontrons à présent que ce système est total dans E. Considérons pour cela une fonction f quelconque dans E. Il existe une famille $\{\alpha_k^i, i = 1,\ldots,d \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$ de scalaires vérifiant $\sum_{i=1}^{d}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k^i|^2 < +\infty$ telle que l'on ait $f = \sum_{i=1}^{d}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k^i T^k g_i$, soit encore, $\hat{f}(\lambda) = \sum_{i=1}^{d} m_i(\lambda)\hat{g}_i(\lambda)$ où $m_i(\lambda) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k^i e^{i\lambda k}$. Posons

$$\hat{Z}(\lambda) = \begin{pmatrix} m_1(\lambda)\hat{g}_1(\lambda) \\ \vdots \\ m_d(\lambda)\hat{g}_d(\lambda) \end{pmatrix},$$

soit, $\hat{Z}(\lambda) = M(\lambda)\hat{A}(\lambda)$ où $M(\lambda) = \mathrm{diag}(m_1,(\lambda),\ldots,m_d(\lambda))$.

(18) entraîne que $\hat{Z}(\lambda) = M(\lambda)\theta^{1/2}(\lambda)\hat{C}(\lambda) = N(\lambda)\hat{C}(\lambda)$. Désignons alors par $(n_{i,j}(\lambda))_{i,j=1,\ldots,d}$ les coefficients de $N(\lambda)$. Il est clair que les fonctions $n_{i,j}$ sont 2π-périodiques et de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$. Ceci étant posé, nous obtenons

$$\hat{Z}(\lambda) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{d} n_{1,j}(\lambda)\hat{\sigma}_1(\lambda) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{d} n_{d,j}(\lambda)\hat{\sigma}_d(\lambda) \end{pmatrix}$$

d'où,

$$\hat{f}(\lambda) = \sum_{i=1}^{d} b_i(\lambda)\hat{\sigma_i}(\lambda) \tag{22}$$

avec $b_i(\lambda) = \sum_{j=1}^{d} n_{i,j}(\lambda)$. Puisque les fonctions b_i sont de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$, nous pouvons définir leurs coefficients de Fourier respectifs $(\beta_k^i)_{k\in\mathbb{Z}}$. Ceux-ci vérifient $\sum_{i=1}^{d} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\beta_k^i|^2 < +\infty$. Par conséquent, la série $\sum_{i=1}^{d} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k^i T^k \sigma_i$ converge dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ et l'identité (22) assure que $f = \sum_{i=1}^{d} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k^i T^k \sigma_i$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, ce qui achève la démonstration de la proposition. □

3.3. Applications

Nous reprenons à présent le cadre du paragraphe 1.

Exemple 1 : Nous généralisons l'exemple 1 du paragraphe 1. Considérons pour cela une ondelette ϕ_1 relative au cas scalaire, à savoir :

- $\{T^k\phi_1, k \in \mathbb{Z}\}$ est un système de Riesz.

- ϕ_1 vérifie $\hat{\phi_1}(\lambda) = m_1(\frac{\lambda}{2})\hat{\phi_1}(\frac{\lambda}{2})$, où m_1 est une fonction 2π-périodique, de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$. Nous supposons en outre que la fonction m_1 est continue sur $[0, 2\pi]$.

Considérons maintenant une fonction m_2 2π-périodique, continue et posons

$$\vec{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} m_1(\lambda) \\ m_2(\lambda) \end{pmatrix}$$

et $\hat{\phi_2}(\lambda) = m_2(\frac{\lambda}{2})\hat{\phi_1}(\frac{\lambda}{2})$.

Proposition 3.5. *Si pour tout réel λ, les vecteurs $\vec{A}(\lambda)$ et $\vec{A}(\lambda + \pi)$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{C}^2$, alors le système $\{T^k\phi_i, i = 1, 2,\ k \in \mathbb{Z}\}$ est un système de Riesz.*

Remarque :

1. Avec les notations habituelles, la fonction vectorielle $\hat{V}$ vérifie (5) avec

$$H(\lambda) = \begin{pmatrix} m_1(\lambda) & 0 \\ m_2(\lambda) & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons que $\operatorname{Ker} H(\lambda)^*$ est le sous-espace orthogonal à $\vec{A}(\lambda)$ dans $\mathbb{C}^2$. Par conséquent la condition de la proposition est équivalente $\operatorname{Ker} H(\lambda)^* \bigcap \operatorname{Ker} H(\lambda + \pi)^* = \{\vec{0}\}$, ce qui s'écrit encore $H(\lambda)H(\lambda)^* + H(\lambda+\pi)H(\lambda+\pi)^* > 0$ (au sens de la relation d'ordre sur les matrices hermitiennes). Nous retrouverons cette identité dans le paragraphe suivant comme condition nécessaire à la propriété (P3).

2. Suivant les notations habituelles ϕ_2 est une fonction de l'espace V_1. Cependant l'espace engendré par les translatés entières des fonctions ϕ_1 et ϕ_2 est à priori un sous-espace propre de V_1. Il coïncide avec V_1 si par exemple il existe deux fonctions a et b 2π-périodiques et bornées, telles que $\hat{\psi}(\lambda) = a(\lambda)\phi_1(\lambda) + b(\lambda)\phi_2(\lambda)$ où ψ est l'ondelette "mère" associée à ϕ_1.

Démonstration de la proposition 3.5 :

Il est clair que $\hat{\phi}_2$ est une fonction de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. Puisque l'on a $\hat{V}(\lambda) = \hat{\phi}_1(\frac{\lambda}{2})\vec{A}(\frac{\lambda}{2})$, la série matricielle θ associée aux fonctions ϕ_1, ϕ_2 s'écrit

$$\theta(\lambda) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\phi}_1(\frac{\lambda}{2} + k\pi)|^2 \vec{A}(\frac{\lambda}{2} + k\pi)\vec{A}(\frac{\lambda}{2} + k\pi)^*$$

d'où, en sommant sur les entiers pairs, puis sur les entiers impairs,

$$\theta(\lambda) = \gamma(\frac{\lambda}{2})\vec{A}(\frac{\lambda}{2})\vec{A}(\frac{\lambda}{2})^* + \gamma(\frac{\lambda}{2} + \pi)^* \vec{A}(\frac{\lambda}{2} + \pi)\vec{A}(\frac{\lambda}{2} + \pi)^*$$

où $\gamma(\lambda) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\phi}_1(\lambda + 2k\pi)|^2$.

Par hypothèse et d'après la proposition 3.1, γ vérifie (12) (avec $d = 1$). Par conséquent, θ vérifie à son tour (12) (avec $d = 2$) si il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\frac{1}{c} Id \leq \Delta(\lambda) \leq c\, Id \tag{23}$$

où $\Delta(\lambda) = \vec{A}(\lambda)\vec{A}(\lambda)^* + \vec{A}(\lambda + \pi)\vec{A}(\lambda + \pi)^*$.

Lemme 3.6. *Etant donnée une fonction B continue sur $[0, 2\pi]$, à valeurs dans l'espace des matrices hermitiennes, les fonctions μ et ν définies par*

$$\mu(\lambda) = \sup_{\|\vec{x}\|_2=1} \langle B(\lambda)\vec{x}, \vec{x}\rangle$$

et

$$\nu(\lambda) = \inf_{\|\vec{x}\|_2=1} \langle B(\lambda)\vec{x}, \vec{x}\rangle$$

sont continues sur $[0, 2\pi]$.

Admettons pour le moment ce lemme et notons encore μ et ν les fonctions du lemme ci-dessus associées à la fonction $\lambda \to \Delta(\lambda)$. La double inégalité (23) est équivalente à

$$\frac{1}{c} \leq \nu(\lambda) \leq \mu(\lambda) \leq c, \ \lambda \in [0, 2\pi]. \tag{24}$$

Or, d'après le lemme 3.6, les fonctions μ et ν sont continues, ce qui prouve la dernière inégalité de (24). Pour prouver la première inégalité de (24), il suffit de démontrer que η ne s'annule pas sur $[0, 2\pi]$, c'est-à-dire que $\operatorname{Ker} \Delta(\lambda) = \{\vec{0}\}$ pour chaque réel $\lambda \in [0, 2\pi]$, ce qui est évident grâce à l'hypothèse de la proposition.

Démontrons à présent le lemme 3.6. D'après la théorie des matrices hermitiennes, nous savons que $|B(\lambda)|_2 = \max(|\mu(\lambda)|, |\nu(\lambda)|)$. Posons $c = \sup_{\lambda \in [0,2\pi]} |B(\lambda)|_2 + 1$ (c est défini car $\lambda \longrightarrow |B(\lambda)|_2$ est continue sur $[0, 2\pi]$), puis, $T(\lambda) = B(\lambda) + c\,Id$, $\lambda \in [0, 2\pi]$.

Les fonctions μ' et ν' du lemme relatives à la fonction $\lambda \longrightarrow T(\lambda)$ vérifient $\mu'(\lambda) = \mu(\lambda) + c$ et $\eta'(\lambda) = \eta(\lambda) + c$, d'où en particulier, $\nu'(\lambda) \geq 1$. $T(\lambda)$ est donc une matrice hermitienne, positive et non dégénérée, de sorte que $\mu'(\lambda) = |T(\lambda)|_2$ et $\eta'(\lambda) = |T(\lambda)^{-1}|_2^{-1}$. Les applications $\lambda \longrightarrow T(\lambda)$ et $\lambda \longrightarrow T(\lambda)^{-1}$ étant continues, nous en déduisons que les fonctions μ et η sont continues sur $[0, 2\pi]$. □

Exemple 2 : Fonctions splines

Nous reprenons ici la définition des espaces de fonctions splines présentée dans [14]. Pour tout entier $r \geq 0$, nous désignerons par V_0 (sous-entendu $V_0(r)$) le sous-espace de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ constitué des fonctions de classe $\mathcal{C}^{r-1}$ sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à chaque intervalle $[k, k+1]$ ($k \in \mathbb{Z}$) coïncide avec un polynôme de degré $\leq r$. Evidemment si $r = 0$, nous ne tenons pas compte de la condition de régularité. Notons χ la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, 1]$ et rappelons que la famille composée des translatés entières de la fonction $g = \chi * \cdots * \chi$ (r+1 fois) forme une base de Riesz de V_0 et plus précisément une base orthonormée si $r = 0$. Nous obtenons ainsi pour $r = 1$: $g(x) = (1 + x)1_{[-1,0]}(x) + (1 - x)1_{[0,1]}(x)$. Notons que $g(n) = \delta_{0,n}$ ($n \in \mathbb{Z}$), de sorte que toute fonction dans V_0 s'écrit $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) g(x - k)$, cette série étant, pour x fixé, une somme finie. Y. Meyer généralise ce résultat dans [14], à savoir : si r est impair, alors il existe une fonction h dans V_0 vérifiant

$$h(n) = \delta_{0,n}, \; \forall n \in \mathbb{Z} \tag{25}$$

et telle que ses translatées entières forment une base de Riesz de V_0. h est appelée spline Lagrangien et toute fonction dans V_0 vérifie $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) h(x - k)$ (on dit aussi que h est une ondelette interpolante [4]). En revanche, si r est pair, il n'existe pas de spline Lagrangien. Sans entrer dans les détails de la démonstration rappelons que la condition (25) est équivalente (du moins quand $\hat{h}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$) à $a(\lambda) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{h}(\lambda + 2\pi) = 1$ (il suffit pour cela d'utiliser l'identité $a(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) e^{i\lambda n}$). Puisque $\hat{h}(\lambda) = m(\lambda)\hat{g}(\lambda)$ où $m \in \mathbb{L}^2(0, 2\pi)$, nous en concluons qu'il existe un spline Lagrangien dans V_0 si et seulement si la fonction $\gamma(\lambda) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(\lambda + 2k\pi)$ ne s'annule pas sur $[0, 2\pi]$, auquel cas $\hat{h}(\lambda) = (\gamma(\lambda))^{-1}\hat{g}(\lambda)$. Y. Meyer prouve que cette dernière propriété n'est vérifiée que quand r est impair. La fonction g correspondante étant à support compact, γ est un polynôme trigonométrique. Mais alors la fonction $\lambda \longrightarrow (\gamma(\lambda))^{-1}$ n'est pas un polynôme trigonométrique et la fonction h n'est plus à support compact (excepté pour $r = 1$ où $\gamma \equiv 1$). Ainsi si $r = 3$, la fonction h est à décroissance exponentielle. Notons que la définition d'une base de Riesz appliquée au système $\{T^k g,\ k \in \mathbb{Z}\}$ exprime (pour r impair) que l'opérateur d'échantillonnage $S_0 : f \longrightarrow (f(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ définit un isomorphisme de V_0 dans

$\ell^2(\mathbb{Z})$ et le spline Lagrangien n'est autre que l'image réciproque par S_0 de δ_0. Nous nous proposons de démontrer un résultat analogue (cette fois pour $r \neq 0$ quelconque), mais à partir de l'opérateur

$$\begin{array}{rcl} U : E & \rightarrow & \mathcal{S} \\ f & \rightarrow & (\vec{\Delta} f(k))_{k\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

où, E est l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^{r-1}$ sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à chaque intervalle $\left[\frac{k}{r}, \frac{k+1}{r}\right]$ ($k \in \mathbb{Z}$) coïncide avec un polynôme de degré $\leq r$ et $\mathcal{S}$, l'espace des suites de vecteurs de $\mathbb{R}^r$. Nous désignons par E_0 l'intersection de E avec $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.

Proposition 3.7. *Soit r un entier positif non nul quelconque. Il existe dans E une unique famille de r fonctions $\phi_0, \ldots, \phi_{r-1}$ vérifiant $\vec{\Delta}\phi_i(n) = \delta_{0,n}\vec{e_i}$ pour chaque entier $i = 0, \ldots, r-1$ ($n \in \mathbb{Z}$). Ces fonctions sont à support compact inclus dans $[-1, 1]$ et la famille $\{T^k\phi_i, i = 0, \ldots, r-1;\ k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base de Riesz de E_0.*

Démonstration : Nous allons prouver que l'opérateur U défini ci-dessus est une bijection de E dans $\mathcal{S}$. Nous devons pour cela montrer qu'étant donnés deux vecteurs $\vec{A}(n)$ et $\vec{A}(n+1)$ dans $\mathbb{R}^r$, il existe une unique fonction f de classe $\mathcal{C}^{r-1}$ sur $[n, n+1]$ dont la restriction à chaque intervalle $\left[\frac{k}{r}, \frac{k+1}{r}\right]$ pour $k = nr, \ldots, (n+1)r - 1$ coïncide avec un polynôme de degré $\leq r$, et vérifiant

$$\vec{\Delta} f(\ell) = \vec{A}(\ell),\ \ell = n, n+1. \tag{26}$$

Il suffit évidemment de prouver cette propriété pour $n = 0$. Pour fixer les idées, désignons par F l'espace des fonctions de E restreintes à $[0, 1]$. Un résultat classique d'interpolation (cf. par exemple [16]) assure que toute fonction f dans F s'écrit de manière unique

$$f(t) = \sum_{i=0}^{r} a_i t^i + \sum_{i=1}^{r-1} c_i (t - \frac{i}{r})_+^n$$

où,

$$(t-a)_+ = \left(\begin{array}{cc} (t-a) & \text{si } t \geq a \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right. .$$

Les équations fournies par (26) avec ici $\ell = 0, 1$ forment un système linéaire de $2r$ équations à $2r$ inconnues à savoir $a_0, \ldots, a_r, c_1, \ldots, c_{r-1}$. Il suffit de prouver que la solution nulle est l'unique solution de l'équation homogène associée qui s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{c} a_i = 0,\ i = 0, \ldots, r-1 \\ a_n + \sum_{i=1}^{r-1} (\frac{n-i}{n})^n c_i = 0 \\ \vdots \\ n!\, a_n + n!\, \sum_{i=1}^{r-1} \frac{n-i}{n} c_i = 0 \end{array} \right. .$$

Il reste finalement à résoudre un système linéaire de r équations à r inconnues $(a_n, c_1, \ldots, c_{r-1})$ et l'on conclut facilement car le déterminant associé à ce système est un déterminant de Vandermonde non nul. Par conséquent U est bijective et les fonctions ϕ_i de la propostion sont définies de manière unique respectivement comme image réciproque par U des suites $\delta_0\ \vec{e_i}$. Par construction (ou encore voir remarque 1. ci-dessous), le support de chaque fonction ϕ_i coïncide avec l'intervalle $[-1,1]$, et toute fonction dans E s'écrit de manière unique

$$f(x) = \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f^{(j)}(k)\phi_j(x-k) \tag{27}$$

(pour x fixé, cette série est en fait une somme finie).

Cette identité appliquée aux r fonctions $x \longrightarrow \phi_i(\frac{x}{r})$ (qui appartiennent de manière évidente à E) entraîne l'identité vectorielle

$$V(\frac{x}{r}) = \sum_{k=-(r-1)}^{r-1} h(k)V(x-k),$$

où l'on a posé

$$V = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \vdots \\ \phi_{r-1} \end{pmatrix}$$

et

$$h(k) = \left(r^{-j}\phi_i^{(j)}(\frac{k}{r})\right)_{i,j=0,\ldots,r-1}.$$

Par passage à la transformée de Fourier, cette identité devient

$$\hat{V}(\lambda) = H(\frac{\lambda}{r})\hat{V}(\frac{\lambda}{r}),$$

où

$$H(\lambda) = \frac{1}{r}\sum_{k=-(r-1)}^{r-1} e^{i\lambda k}h(k).$$

Notons par ailleurs que $E_0 = D_r\ V_0$, où $D_r f(x) = f(rx)$. Nous disposons par conséquent d'une base de Riesz naturelle dans E_0, à savoir $\{r^{1/2}g(r\cdot -k),\ \ k\in\mathbb{Z}\}$ où la fonctions g est la convolée $(r+1)$ fois de χ. Du fait que les fonctions $x \longrightarrow g(rx-k)$ appartiennent à E (évident) et sont à support compact, il existe d'après (27) un entier N telle que l'on ait, pour tout réel x

$$g(rx-k) = \sum_{j=0}^{r-1} r^j \sum_{|k|\leq N} g^{(j)}(rn-k)\phi_j(x-k).$$

Nous en déduisons que la famille composée des translatés entières des r fonctions ϕ_i est totale dans E_0. Il reste à prouver que cette famille forme un système de Riesz. Désignons par θ la série matricielle associée aux fonctions $\phi_0, \ldots, \phi_{r-1}$. La décomposition de chaque fonction ϕ_i dans la base $\{r^{1/2}g(r\cdot -k),\ \ k\in\mathbb{Z}\}$ assure (par passage à la transformée de Fourier) l'existence de r polynômes trigonométriques $m_0,\ldots,m_{r-1}$ tels que

$$\begin{aligned}\hat{V}(\lambda) &= \hat{g}(\frac{\lambda}{r})\begin{pmatrix} m_0(\frac{\lambda}{r}) \\ \vdots \\ m_r(\frac{\lambda}{r})\end{pmatrix} \\ &= \hat{g}(\frac{\lambda}{r})\vec{A}(\frac{\lambda}{r}).\end{aligned} \tag{28}$$

D'où,

$$\theta(\lambda)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{g}(\frac{\lambda+2k\pi}{r})|^2\vec{A}(\frac{\lambda+2k\pi}{r})\vec{A}(\frac{\lambda+2k\pi}{r})^*,$$

soit, en sommant séparément sur les entiers de la forme $\ell r,\ell r+1,\ldots,\ell r+\ell-1$,

$$\theta(\lambda)=\sum_{\ell=0}^{r-1}\mu(\frac{\lambda+2\ell\pi}{r})\vec{A}(\frac{\lambda+2\ell\pi}{r})\vec{A}(\frac{\lambda+2\ell\pi}{r})|^*,$$

où μ est la série scalaire associée à la fonction g. Puisque μ vérifie la double inégalité (12) (avec $d=1$), nous déduisons de ce qui précède que

$$\operatorname{Ker}\theta(\lambda)=\bigcap_{\ell=0}^{r-1}\left(\vec{A}(\frac{\lambda+2\ell\pi}{r})\right)^{\perp} \tag{29}$$

où $(\vec{A}(\lambda))^{\perp}$ est l'espace orthogonal dans $\mathbf{C}^{\,r}$ au vecteur $\vec{A}(\lambda)$.

Inversement, puisque g appartient à E_0 et est à support compact, il existe r polynômes trigonométriques $a_0,\ldots,a_{r-1}$ tels que

$$\hat{g}(\lambda)=\sum_{i=0}^{r-1}a_i(\lambda)\hat{\phi}_i(\lambda)$$

(utiliser (27) et la transformée de Fourier). Finalement (28) devient

$$\begin{aligned}\hat{V}(\lambda) &= \begin{pmatrix} m_0(\frac{\lambda}{r})a_0(\frac{\lambda}{r})\cdots m_0(\frac{\lambda}{r})a_{r-1}(\frac{\lambda}{r}) \\ \vdots \\ m_{r-1}(\frac{\lambda}{r})a_0(\frac{\lambda}{r})\cdots m_{r-1}(\frac{\lambda}{r})a_{r-1}(\frac{\lambda}{r})\end{pmatrix}\hat{V}(\frac{\lambda}{r}) \\ &= G(\frac{\lambda}{r})\hat{V}(\frac{\lambda}{r}),\end{aligned}$$

et par unicité de la décomposition (27), nous en déduisons que $H=G$. Or il est clair que $\operatorname{Im}G(\lambda)=\mathbf{C}\ \vec{A}(\lambda)$, d'où $\operatorname{Ker}H(\lambda)^*=(\vec{A}(\lambda))^{\perp}$. En outre, nous obtenons grâce à un calcul évident

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=0}^{r-1}H(\lambda+\frac{2\ell\pi}{r}) &= \frac{1}{r}\sum_{k=-(r-1)}^{r-1}e^{i\lambda k}\left(\sum_{\ell=0}^{r-1}e^{\frac{2i\pi k\ell}{r}}\right)h(k) \\ &= \operatorname{diag}(1,r^{-1},\ldots,r^{-(r-1)}).\end{aligned}$$

Concluons à présent en posant $\mu(\lambda) = \sup_{\|\vec{x}\|_2=1} \langle\theta(\lambda)\vec{x},\vec{x}\rangle$ et $\nu(\lambda) = \inf_{\|\vec{x}\|_2=1} \langle\theta(\lambda)\vec{x},\vec{x}\rangle$. Nous verrons dans le paragraphe suivant que θ est un polynôme trigonométrique à coefficients dans $\mathcal{M}(r,\mathbf{C}\ )$ (résulte de la propriété de support des fonctions ϕ_i et de la formule sommatoire de Poisson). θ est en particulier une fonction continue et d'après le lemme 3.6, les fonctions μ et ν sont continues. Utilisant (29) et ce qui précède, nous concluons que $\operatorname{Ker}\theta(\lambda) = \{\vec{0}\}$, d'où $\nu(\lambda) > 0, \forall\lambda \in [0,2\pi]$. Grâce à un argument de continuité, θ vérifie la double inégalité (12). □

Remarques

1. Les fonctions $\phi_0,\ldots,\phi_{r-1}$ de la proposition sont appelée *fonctions principales* de E_0. Pour les calculer, il suffit de déterminer les r éléments $p_0,\ldots,p_{r-1}$ de l'ensemble F (cf démonstration) vérifiant $\vec{\Delta p_i}(0) = \vec{e_i}$ et $\vec{\Delta p_i}(1) = \vec{0}$ pour $i = 0,\ldots,r-1$. Les fonctions principales sont alors définies par

$$\phi_i(x) = p_i(x)1_{[0,1]}(x) + (-1)^i p_i(-x)1_{[-1,0]}(x), \quad i = 0,\ldots,r-1.$$

- si $r = 1, p_0(x) = 1-x$ et l'espace E_0 coïncide avec l'espace V_0 des splines linéaires.
- si $r = 2$, alors

$$\begin{aligned} p_0(x) &= (1-2x^2)1_{[0,\frac{1}{2}]}(x) + 2(x-1)^2 1_{[\frac{1}{2},1]}(x) \\ p_1(x) &= x(1-\frac{3}{2}x)1_{[0,\frac{1}{2}]}(x) + \frac{1}{2}(x-1)^2 1_{[\frac{1}{2},1]}(x). \end{aligned}$$

- Si $r = 3$, nous obtenons

$$\begin{aligned} p_0(x) &= (-\frac{9}{2}x^3+1)1_{[0,\frac{1}{3}]}(x) + \left(9(x-\frac{1}{3})^3 - \frac{9}{2}(x-\frac{1}{3})^2 - \frac{3}{2}(x-\frac{1}{3}) + \frac{5}{6}\right) 1_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}(x) \\ &- \frac{9}{2}(x-1)^3 1_{[\frac{2}{3},1]}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1(x) &= (-3x^3+x)1_{[0,\frac{1}{3}]}(x) + \left(\frac{9}{2}(x-\frac{1}{3})^3 - 3(x-\frac{1}{3})^2 + \frac{2}{9}\right) 1_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}(x) \\ &- \frac{3}{2}(x-1)^3 1_{[\frac{2}{3},1]}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2(x) &= (-\frac{11}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2)1_{[0,\frac{1}{3}]}(x) \\ &+ \left(\frac{7}{12}(x-\frac{1}{3})^3 - \frac{5}{12}(x-\frac{1}{3})^2 + \frac{1}{36}(x-\frac{1}{3}) + \frac{7}{144}\right) 1_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}(x) \\ &- \frac{1}{6}(x-1)^3. \end{aligned}$$

2. D'après la définition d'une base de Riesz, l'opérateur

$$I_o : f \to ((f(k))_{k\in\mathbb{Z}},\ldots,(f^{(r-1)}(k))_{k\in\mathbb{Z}})$$

définit un isomorphisme de E_o dans $(\ell^2(\mathbb{Z}))^r$.

3. Si r est un entier impair ($r \geq 3$), nous disposons de deux bases d'interpolation dans E_0, à savoir celle de la proposition et $\{r^{1/2}h(r\cdot -k), \quad k \in \mathbb{Z}\}$ où h est le spline Lagrangien de l'espace V_0 correspondant. Si nous posons pour $\ell = 0, \dots, r-1$ $h_\ell(x) = r^{1/2}h(rx-\ell)$, alors la famille ci-dessus s'écrit $\{h_\ell(\cdot - k), \ell = 0, \dots, r-1; \; k \in \mathbb{Z}\}$ et pour toute fonction dans E_0, nous avons le choix entre la formule (27) et

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{r-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\frac{\ell}{r} - k)h_\ell(x-k). \tag{30}$$

Il est difficile de comparer les formules (30) et (27) car la première repose sur la donnée de f sur le réseau $\frac{1}{r}\ \mathbb{Z}$, tandis que la seconde nécessite la connaissance de $f, \dots, f^{(r-1)}$ cette fois sur le réseau $\mathbb{Z}$. Notons cependant que les fonctions principales ϕ_i sont à support compact, ce qui n'est pas le cas (cf. ci-dessus) des fonctions h_i.

4. Opérateur P_H

Rappelons que si $\hat{\phi}$ est une fonction de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ vérifiant (2), alors la série scalaire θ associée est invariante sous l'action de l'opérateur défini sur sur l'espace des fonctions 2π-périodiques à valeurs complexes par (cf. [2], [3], [5])

$$P_H f(\lambda) = |H(\frac{\lambda}{2})|^2 f(\frac{\lambda}{2}) + |H(\frac{\lambda}{2}+\pi)|^2 f(\frac{\lambda}{2}+\pi).$$

Ainsi pour faire apparaître de façon naturelle l'opérateur P_H associé cette fois à une fonction matricielle H 2π-périodique, commençons par supposer que les fonctions $\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_d$ solutions de (5) sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. Nous reprenons les notations du paragraphe 1 concernant la fonction matricielle $\hat{V}$ et nous désignons par θ la série matricielle associée aux fonctions $\phi_1, \dots, \phi_d$. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \theta(\lambda) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{V}(\lambda+2k\pi)\hat{V}(\lambda+2k\pi)^* \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} H(\frac{\lambda}{2}+k\pi)\hat{V}(\frac{\lambda}{2}+k\pi)\hat{V}(\frac{\lambda}{2}+k\pi)^* H(\frac{\lambda}{2}+k\pi)^*. \end{aligned}$$

Découpant la somme ci-dessus suivant la somme sur les indices pairs, puis celle sur les indices impairs, nous obtenons (H étant 2π-périodique)

$$\theta(\lambda) = H(\frac{\lambda}{2})\theta(\frac{\lambda}{2})H(\frac{\lambda}{2})^* + H(\frac{\lambda}{2}+\pi)\theta(\frac{\lambda}{2}+\pi)H(\frac{\lambda}{2}+\pi)^*. \tag{31}$$

4.1. Définitions

Nous noterons $\mathcal{M}_d$ l'espace des fonctions matricielles 2π-périodiques à valeurs dans $\mathcal{M}(d, \mathbf{C}\ )$.

- Soit H une fonction matricielle 2π-périodique. Nous désignerons par P_H l'opérateur défini sur $\mathcal{M}_d$ par

$$P_H F(\lambda) = H(\frac{\lambda}{2})F(\frac{\lambda}{2})H(\frac{\lambda}{2})^* + H(\frac{\lambda}{2}+\pi)F(\frac{\lambda}{2}+\pi)H(\frac{\lambda}{2}+\pi)^*.$$

Si H est continue alors P_H opère aussi sur l'ensemble $\mathcal{C}_d$ des fonctions continues, 2π-périodique, à valeurs dans $\mathcal{M}(d, \mathbb{C})$.

- Si pour tout réel λ, $F(\lambda)$ est une matrice hermitienne, positive, alors la fonction $P_H F$ vérifie cette même propriété (évident). Nous dirons pour exprimer ceci que P_H est *un opérateur positif.*

Nous venons de voir que si les solutions $\hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_d$ de (5) sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction θ associée est P_H-invariante. Nous montrerons dans le paragraphe 5.1 qu'inversement, si P_H possède une fonction matricielle F P_H-invariante, telle que $F(\lambda)$ soit hermitienne positive pour tout réel λ et non dégénérée pour $\lambda = 0$, alors les fonctions $\hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_d$ sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

4.2. Applications : Conditions nécessaires relatives à (P3).

Soit H une fonciton matricielle continue et 2π-périodique. Nous supposons dans ce paragraphe que les solutions $\hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_d$ de (5) sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ et que la famille $\{T^k \phi_i, i = 1, \ldots, d, k \in \mathbb{Z}\}$ forme un système de Riesz. Nous notons θ la série matricielle associée et rappelons que celle-ci vérifie (12).

Lemme 4.1. *Il existe une constante $D > 0$ telle que l'on ait, pour tout réel λ,*

$$H(\lambda)H(\lambda)^* + H(\lambda+\pi)H(\lambda+\pi)^* \geq DId. \tag{32}$$

Preuve : La fonction θ vérifie pour presque tout réel λ, et tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{C}^d$,

$$\langle \theta(\lambda)\vec{x}, \vec{x} \rangle \geq \frac{1}{c}\|x\|^2 \text{ (cf. proposition 3.1).}$$

d'où, grâce à (31)

$$\langle \theta(\frac{\lambda}{2})H(\frac{\lambda}{2})^*\vec{x}, H(\frac{\lambda}{2})^*\vec{x} \rangle + \langle \theta(\frac{\lambda}{2}+\pi)H(\frac{\lambda}{2}+\pi)^*\vec{x}, H(\frac{\lambda}{2}+\pi)^*\vec{x} \rangle \geq \frac{1}{c}\|\vec{x}\|_2^2,$$

d'où, pour presque tout réel λ et tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{C}^d$, $\|H(\lambda)^*\vec{x}\|_2^2 + \|H(\lambda+\pi)^*\vec{x}\|_2^2 \geq \frac{1}{c}\|\vec{x}\|_2^2$. Posons maintenant :

$$\mu(\lambda) = \inf_{\|\vec{x}\|_2=1} \langle T(\lambda)\vec{x}, \vec{x} \rangle,$$

où $T(\lambda) = H(\lambda)H(\lambda)^* + H(\lambda+\pi)H(\lambda+\pi)^*$. Nous savons qu'on a pour presque tout réel λ, $\mu(\lambda) \geq \frac{1}{c}$. La fonction H étant continue, nous déduisons du lemme 3.6. que μ est continue, de sorte que cette dernière inégalité est vérifiée pour tout réel λ. □

Lemme 4.2. *Supposons que* $H(0) = \mathrm{diag}(1, \mu_2, \ldots, \mu_d)$ *avec* $|\mu_i| < 1$ *ou* $\mu_i = 1$, *et que les fonctions* $\phi_1, \ldots, \phi_d$ *soient données par (6) avec* $\vec{x} = \vec{e_1}$.

Alors, si les matrices $\theta(0)$ *et* $\theta(\pi)$ *sont non dégénérées, on a*

$$H(\pi)^* \vec{e}_1 = \vec{0} \tag{33}$$

$$\hat{\phi}_1(2k\pi) = \delta_{0,k}, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{34}$$

et pour chaque entier $i = 2, \ldots, d$,

$$H(\pi)^* \vec{e}_i \neq \vec{0}, \tag{35}$$

$$\mu_i \neq 1. \tag{36}$$

Notons que sous les hypothèses de ce lemme, on a $\hat{V}(0) = \vec{e_1}$ et que la propriété (34) entraîne $\theta(0)\vec{e_1} = \vec{e_1}$.

Preuve : L'identité (31) appliquée avec $\lambda = 0$ entraîne

$$\langle \theta(0)\vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = \langle H(0)\theta(0)H(0)^*\vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle + \langle H(\pi)\theta(\pi)H(\pi)^*\vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle$$

d'où, puisque $H(0)^*\vec{e}_1 = \vec{e}_1$, $\langle \theta(\pi)H(\pi)^*\vec{e}_1, H(\pi)^*\vec{e}_1 \rangle = 0$, soit $H(\pi)^*\vec{e}_1 = \vec{0}$ car $\theta(\pi)$ est non dégénérée.

Pour $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, posons $2k = 2^p(2\ell + 1)$ $(p \geq 1, \ell \in \mathbb{Z})$. L'équation fonctionnelle (5) entraîne que $\hat{V}(2k\pi) = (H(0))^{p-1} H(\pi) \hat{V}((2\ell + 1)\pi)$, ce qui grâce à (33) assure (34).

Supposons maintenant qu'il existe $i \in \{2, \ldots, d\}$ tel que $\mu_i = 1$. Le raisonnement effectué au début de la démonstration s'applique au vecteur $\vec{e}_i$, de sorte que $H(\pi)^*\vec{e}_i = \vec{0}$. Nous allons prouver que cette dernière propriété ne peut être vérifiée, ce qui prouvera à la fois (35)et (36). Supposons donc que $H(\pi)^*\vec{e}_i = \vec{0}$ avec $i \in \{2, \ldots, d\}$. Alors, le raisonnement ci-dessus appliqué à l'indice i assure que $\hat{\phi}_i(2k\pi) = 0$ pour tout entier k non nul. Puisque par construction on a $\hat{\phi}_1(0) = 0$, nous en déduisons finalement que la i-ème colonne de $\theta(0)$ est nulle, ce qui contredit l'hypothèse. □

4.3. Cas particulier où H est un polynôme trigonométrique

Posons

$$H(\lambda) = \sum_{k=p}^{q} e^{i\lambda k} h(k),$$

ou la famille $\{h(k),\ k = p, \ldots, q\}$ est une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{M}(d, \mathbf{C})$. L'entier égal à $\max(|p|,\ |q|)$ est applelé degré de H. Considérons l'espace E_d des polynômes trigonométriques à coefficients dans $\mathcal{M}(d, \mathbb{C})$. Tout élément F de E_d peut être décomposé comme suit :

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \sum_k e^{i2k\lambda} M(2k) + e^{i\lambda} \sum_k e^{i2k\lambda} M(2k+1) \\ &= F_0(2\lambda) + e^{i\lambda} F_1(2\lambda) \end{aligned}$$

En particulier H s'écrit $H(\lambda) = H_0(2\lambda) + e^{i\lambda} H_1(2\lambda)$ et un calcul évident montre que

$$\begin{aligned} P_H F(\lambda) &= 2[H_0(\lambda)F_0(\lambda)H_0(\lambda) + H_0(\lambda)F_1(\lambda)H_1(\lambda)^* \\ &+ H_1(\lambda)F_0(\lambda)H_1(\lambda)^* + e^{i\lambda} H_1(\lambda)F_1(\lambda)H_0(\lambda)^*]. \end{aligned}$$

Par conséquent, P_H opère sur E_d.

De même, posons $N = q - p$ et définissons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E_d^N des éléments F de E_d, de degré $\leq N$ et tel que, pour tout réel λ, la matrice $F(\lambda)$ soit hermitienne. Autrement dit, $F \in E_d^N$ si $F(\lambda) = \sum_{k=-N}^{N} e^{i\lambda k} M(k)$ où les éléments $M(k)$ de $\mathcal{M}(d, \mathbb{C})$ vérifient $M(-k) = M(k)^*$ pour chaque entier $k = -N, \dots, N$.

Il est clair que P_H opère aussi sur E_N^d.

Remarques.

1. Si les coefficients de H sont des éléments de $\mathcal{M}(d, \mathbb{R})$, alors P_H opère sur les deux espaces équivalents à E_d et E_d^N mais où cette fois les coefficients des polynômes trigonométriques sont pris dans $\mathcal{M}(d, \mathbb{R})$.

2. Si les solutions $\phi_1, \dots, \phi_d$ de l'équation (4) sont des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$, alors elles sont à support compact (cf. paragraphe 2). Nous allons en déduire que la série de Fourier de la fonciton θ associée à $\phi_1, \dots, \phi_d$ est élément de E_d^N. La formule sommatoire de Poisson entraîne que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}_i(\lambda + 2k\pi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \phi_i, T^k \phi_j \rangle e^{i\lambda k} \quad pp.$$

Or, d'après le paragraphe 2, $\operatorname{supp} \phi_i c[p, q]$, d'où, $\langle \phi_i, T^k \phi_j \rangle = 0$ quand $|k| \geq N$, ce qui entraîne $\deg \theta = N - 1$. Par ailleurs, nous savons que $\theta(\lambda)$ est une matrice hermitienne positive. En fait, un lemme plus précis établi dans [14] permet de démontrer que la fonction θ est continue, de sorte qu'elle coïncide avec sa série de Fourier.

3. Plaçons-nous dans le cas scalaire ($d = 1$). La propriété (33) s'écrit $H(\pi) = 0$. Nous allons montrer que cette condition, adjointe à $H(0) = 1$, entraîne que 1 est valeur propre de P_H (ceci sans aucune autre hypothèse sur le polynôme trigonométrique H). En effet, pour des raisons explicitées ci-dessus, P_H laisse invariant l'espace E^N des polynômes trigonométriques de degré N. Considérons la base $\{e^{ik\cdot}, k = -N, \dots, N\}$ de E^N et la matrice P de P_{H/E^N} écrite dans cette base. Notons $(p_{k,\ell})_{k,\ell=-N,\dots,N}$ les coefficients de P. Alors, pour $\ell \in \{-N, \dots, N\}$, on a $P_H(e^{i\ell\cdot})(0) = \sum_{k=-N}^{N} p_{i,\ell}$.

D'autre part, les conditions $H(0) = 1$ et $H(\pi) = 1$ entraînent $P_H f(0) = f(0)$, d'où en particulier $P_H(e^{i\ell\cdot})(0) = 1$. Ainsi, la somme des coefficients de chaque colonne de P vaut 1, ce qui s'exprime encore par

$$^tP \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que 1 est valeur propre de ^tP, donc de P et finalement de P_H. Ce raisonnement se généralise au cadre matricielle si la matrice $H(\pi)$ est nulle. Cependant, cette hypothèse est en contradiction avec la propriété (35), donc avec la propriété (P3).

4.4. Etude des opérations $\lambda \to \frac{\lambda}{2}$ et $\lambda \to \frac{\lambda}{2} + \pi$

Nous reprenons ici des notions étudiées dans [5]. Considérons pour cela les deux applications définies sur $[0, 2\pi[$ par $T_k\lambda = \frac{\lambda}{2} + k\pi$ pour $k = 0, 1$. Pour tout réel x, nous notons $\{x\}$ l'unique élément de $[0, 2\pi[$ vérifiant $\{x\} = x \mod (2\pi)$. Notons qu'on a $T_0 x = \{T_1 x + \pi\}$ et $T_1 x = \{T_0 x + \pi\}$.

Nous nous proposons de déterminer pour chaque entier $m \in I\!N^*$ les sous-ensembles Z_m de $[0, 2\pi[$ définis de la façon suivante :

$\lambda \in Z_m$ s'il existe $\delta_1, \ldots, \delta_p \in \{T_0, T_1\}$ avec $p \leq m$ tel que $\delta_1 \ldots \delta_p \lambda = \lambda$.

Si $\lambda \in Z_m - Z_{m-1}$, nous dirons que λ est un *cycle d'ordre* m. Dans ce cas, il existe par définition m éléments $\delta_1, \ldots, \delta_m$ dans $\{T_0, T_1\}$ tels que $\delta_1 \ldots \delta_m \lambda = \lambda$ et la propriété 2 du lemme ci-dessous prouve l'unicité de la famille $\{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$. Nous pouvons par conséquent définir l'ensemble

$$\mathcal{C}(\lambda) = \{\delta_1 \ldots \delta_k \lambda, k = 1, \ldots, m\}.$$

$\mathcal{C}(\lambda)$ est en quelque sorte l'ensemble des éléments se trouvant sur le chemin allant de λ à λ.

Enfin pour tout réel λ de $[0, 2\pi[$, nous définissons l'ensemble

$$0_\lambda = \{\delta_1 \ldots \delta_n \lambda,\ n \geq 1,\ \delta_i \in \{T_0, T_1\},\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Nous énonçons maintenant quelques propriétés que nous utiliserons dans le paragraphe suivant.

Lemme 4.3.

1. $Z_1 = \{0\}$ *et pour* $m \geq 2$,

$$Z_m = \bigcup_{p=2}^{m} \{\frac{2k\pi}{2^p - 1}, k = 0, 1, \ldots, 2^p - 2\}$$

2. *Soit* $Z = \bigcup_{m \geq 1} Z_m$. *Alors,* $\lambda \in Z \Rightarrow \{\lambda + \pi\} \notin Z$

3. *Si* $\lambda \notin Z$*, alors pour tout élément* x *dans* 0_λ*, il existe un unique entier* $n \geq 1$ *et une et une seule famille* $\delta_1, \ldots, \delta_n$ *d'éléments de* $\{T_0, T_1\}$ *tels que* $\delta_1 \ldots \delta_n \lambda = x$.

Preuve :

1. Soit $\lambda \in [0, 2\pi]$. La décomposition dyadique de $\frac{\lambda}{2\pi}$ assure l'existence d'une suite $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ d'éléments de $\{0, 1\}$ telle que
$$\lambda = 2\pi \sum_{k \geq 1} \frac{\lambda_k}{2^k}.$$
Si nous notons cette décomposition $\lambda = 2\pi \cdot (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, alors
$$T_0 \lambda = 2\pi \cdot (0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots)$$
$$T_1 \lambda = 2\pi \cdot (1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots)$$
Supposons maintenant que $\lambda \in Z_m$. Par définition, il existe un entier $p \leq m$ et p éléments $\delta_1, \ldots, \delta_p$ de $\{T_0, T_1\}$ tels que $\delta_1 \ldots \delta_p \lambda = \lambda$. Il est clair que cette propriété est équivalente à la suivante : $\lambda_k = \lambda_{k'}$ chaque fois que $k = k' \bmod(p)$ (avec $\delta_k = T_{\lambda_k}, k = 1, \ldots, m$). Ainsi, $\lambda \in Z_m$ si et seulement si il existe $p \leq m$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \{0, 1\}$ tel que $2^p \frac{\lambda}{2\pi} = \sum_{k=1}^{p} 2^{p-k} \alpha_k + \frac{\lambda}{2\pi}$, soit, $\dfrac{\lambda}{2\pi} = \dfrac{k}{2^p - 1}$ avec $k = 0, \ldots, 2^p - 2$.

2. Soit $\lambda \in Z$. D'après ce qui précède, nous pouvons écrire $\lambda = \frac{2k\pi}{2^p-1}$ avec $p \geq 2$ et $k \in \{0, 1, \ldots, 2^p - 2\}$. Procédons par l'absurde et supposons que $\{\lambda + \pi\} \in Z$. Si $\lambda \in [0, \pi[$, alors $\{\lambda + \pi\} = \lambda + \pi$, de sorte que $\lambda + \pi = \frac{2\ell\pi}{2^q-1}$ avec $q \geq 2$ et $\ell = \{0, 1, \ldots, 2^q - 2\}$, d'où, $\frac{2k\pi}{2^p-1} + \pi = \frac{2\ell\pi}{2^q-1}$, soit encore, $(2^q - 1)[2(k + 2^{p-1}) - 1] = 2\ell(2^p - 1)$. Or, ces deux entiers ne peuvent être égaux, puisque le premier est impair tandis que le second est pair. On raisonne de la même façon si $\lambda \in [\pi, 2\pi[$ car dans ce cas $\{\lambda + \pi\} = \lambda - \pi$.

3. Soit maintenant $\lambda \notin Z$ et $x \in 0_\lambda$. Supposons que l'on ait
$$x = \sigma_1 \ldots \sigma_n \lambda$$
et
$$x = \delta_1 \ldots \delta_k \lambda$$
avec $\sigma_i, \delta_i \in \{T_0, T_1\}$ et $k < n$. Désignons par Δ l'opérateur défini sur $[0, 2\pi]$ par
$$\Delta y = 2y \bmod 2\pi.$$
Notons que $\Delta T_0 y = \Delta T_1 y = y$. Ceci étant posé, nous obtenons
$$T^k \sigma_1 \ldots \sigma_n \lambda = T^k \delta_1 \ldots \delta_k \lambda,$$
soit $\sigma_{k+1} \ldots \sigma_n \lambda = \lambda$, d'où $\lambda \in Z$, ce qui est impossible par hypothèse. Il reste à démontrer que toute égalité $\delta_1 \cdots \delta_n \lambda = \sigma_1 \cdots \sigma_n \lambda$ entraîne que $\delta_i = \sigma_i$ pour $i =, \ldots, n$. Cette propriété est immédiate si $n = 1$ et on conclut par récurrence sur l'entier n. Le lemme est ainsi démontré.

□

5. Etude des propriétés (P2) et (P3) dans le cas ou H est un polynôme trigonométrique

Nous abordons à présent l'étude des propriétés (P2) et (P3) énoncées dans l'introduction dans le cas où la fonction matricielle H considérée est un polynôme trigonométrique à coefficients dans $\mathcal{M}(d, \mathbb{C})$. Pour fixer les idées, nous posons

$$H(\lambda) = \sum_{k=p}^{q} e^{i\lambda k} h(k), \quad h(k) \in \mathcal{M}(d, \mathbb{C})$$

et $N = q - p$.

Nous reprenons les notations et définitions du paragraphe 4 concernant l'opérateur P_H et l'espace E_d^N. Nous posons $\nu = \dim E_d^N$ et notons P la matrice relative à une base donnée (à priori quelconque) dans E_d^N de l'opérateur P_H restreint à E_d^N. Dans la suite nous identifierons de manière canonique les espaces E_d^N et $\mathbb{R}^\nu$, à savoir par l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} E_d^N & \rightarrow & \mathbb{R}^\nu \\ F & \rightarrow & \vec{F}, \end{array}$$

où les coordonnées de $\vec{F}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^\nu$ sont exactement ceux de F dans la base de E_d^N choisie ci-dessus. Enfin, nous noterons I l'élément de E_d^N identiquement égal à Id.

5.1. Solutions de l'équation (5) dans $L^2(\mathbb{R})$

Nous supposons dans ce paragraphe qu'il existe un élément M dans $GL(d, \mathbb{C})$ telle que

$$M^{-1}H(0)M = \mathrm{diag}(1, \mu_2, \ldots, \mu_d) \text{ avec } |\mu_i| < 1 \text{ pour } i = 2, \ldots, d \tag{37}$$

et

$$H(\pi)(M^{-1})^* \vec{e_1} = \vec{0}. \tag{38}$$

Nous considérons ici les solutions de (5) données par (6) avec $\vec{x} = M\vec{e_1}$.

Théorème 5.1. *S'il existe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^\nu$ telle que*

$$|P| = \sup_{\|\vec{x}\|=1} \|P\vec{x}\| \leq 1, \tag{39}$$

alors les fonctions $\hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_d$ sont de carré intégrable sur $I\!R$.

Nous allons montrer que la propriété (39) adjointe aux hypothèses (37) et (38) entraîne que 1 est valeur propre de l'opérateur P_H. Par conséquent (39) s'écrit encore $|P| = 1$. Notons par ailleurs que (39) est équivalente à la propriété suivante.

Les valeurs propres de P sont en module inférieures ou égales à 1 et toute valeur propre α de module 1 vérifie $\mathrm{Ker}(P - \alpha Id) = \mathrm{Ker}(P - \alpha Id)^2$. (40)

Evidemment dans la pratique ce critère est plus intéressant que (39). L'équivalence ci-dessus découle d'un lemme classique d'algèbre linéaire.

Remarques :

1. D'après l'identité de Plancherel et le paragraphe 2, les fonctions ϕ_i définies pour $i = 1, \ldots, d$ comme transformées de Fourier inverses des fonctions $\hat{\phi}_i$ sont de carré intégrable et à support compact contenu dans $[p, q]$.

2. Si H vérifie

$$H(\lambda)H(\lambda)^* + H(\lambda+\pi)H(\lambda+\pi)^* \leq Id, \quad \forall \lambda \in [-\pi, \pi] \tag{41}$$

alors la matrice P vérifie (39). En effet si nous posons $\|F\|_\infty = \sup_{\lambda\in[-\pi,\pi]} |F(\lambda)|_2$, alors il est clair que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E_d^N et pour tout vecteur $\vec{x}$ dans $\mathbf{C}^{\,d}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle P_H F(\lambda)\vec{x}, \vec{x}\rangle &= \langle F(\frac{\lambda}{2})H(\frac{\lambda}{2})^*\vec{x}, H(\frac{\lambda}{2})^*\vec{x}\rangle \\ &+ \langle F(\frac{\lambda}{2}+\pi)H(\frac{\lambda}{2}+\pi)^*\vec{x}, H(\frac{\lambda}{2}+\pi)^*\vec{x}\rangle \end{aligned}$$

d'où, grâce à (41)

$$\langle P_H F(\lambda)\vec{x}, \vec{x}\rangle \leq \|F\|_\infty \times \|\vec{x}\|_2^2,$$

ce qui s'écrit encore $\|P_H F\|_\infty \leq \|F\|_\infty$. En utilisant l'identification établie précédemment, nous posons $\|\vec{F}\| = \|F\|_\infty$ pour tout élément $\vec{F}$ de $\mathbf{C}^{\,\nu}$. La propriété (39) est vérifiée avec $\|\cdot\|$.

Démonstration du théorème 5.1. Considérons la fonction matricielle G définie par

$$G(\lambda) = M^{-1}H(\lambda)M$$

et notons P_G l'opérateur du paragraphe 4 associé à G. Pour tout élément F dans E_d^N, nous obtenons facilement

$$P_G F(\lambda) = M^{-1}P_H(MF\,M^*)(\lambda)(M^{-1})^*.$$

Soit $\|\cdot\|_3$ la norme sur E_d^N définie par $\|F\|_3 = \|F'\|$, où l'on a posé $F'(\lambda) = MF(\lambda)M^*$ (la norme $\|\cdot\|$ est celle pour laquelle la propriété (39) est vérifiée). Ceci étant posé, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|P_G F\|_3 &= \|MP_G FM^*\| \\ &= \|P_H(MFM^*)\| \end{aligned}$$

d'où,

$$\|P_G F\|_3 \leq \|MFM^*\| = \|F\|_3.$$

Si nous désignons par Q la matrice dans la base de E_d^N (choisie au départ) de la restriction de P_G à l'espace E_d^N, alors nous concluons que Q vérifie (39) avec $\|\cdot\|_3$.

Posons à présent (cf notation du paragraphe 2)

$$\hat{X}(\lambda) = \begin{pmatrix} \hat{\sigma_1}(\lambda) \\ \vdots \\ \hat{\sigma_d}(\lambda) \end{pmatrix} = G_\infty(\lambda)\vec{e_1} = M^{-1}\hat{V}(\lambda).$$

Il est clair qu'il suffit de montrer que les fonctions $\hat{\sigma_1}, \ldots, \hat{\sigma_d}$ sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. La démonstration est basée sur les deux lemmes suivants.

Lemme 5.2. $\forall F \in \mathcal{C}_d, \forall n \geq 1,$

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_G^n F(\lambda)d\lambda = \int_{-2^n\pi}^{2^n\pi} \Pi_n(\lambda)F(\frac{\lambda}{2^n})\Pi_n(\lambda)^* d\lambda$$

où

$$\Pi_n(\lambda) = G(\frac{\lambda}{2})\cdots G(\frac{\lambda}{2^n})$$

Lemme 5.3. *Il existe un élément F_0 dans E_d^N vérifiant $F_0(0)\vec{e_1} = \vec{e_1}$, $P_G F_0 = F_0$, et telle que $F_0(\lambda)$ soit une matrice hermitienne positive pour tout réel λ.*

Admettons dans un premier temps ces deux lemmes. Le lemme 5.2 appliqué avec la fonction F_0 du lemme 5.3 assure qu'on a pour $i = 1, \ldots, d$ et tout entier $n \geq 1$

$$\int_{-2^n\pi}^{2^n\pi} \langle \Pi_n(\lambda)F_0(\frac{\lambda}{2^n})\Pi_n^*(\lambda)\vec{e_i}, \vec{e_i}\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \langle F_0(\lambda)\vec{e_i}, \vec{e_i}\rangle d\lambda.$$

D'où, d'après le lemme de Fatou,

$$\int_{\mathbb{R}} \langle G_\infty(\lambda)F_0(0)G_\infty(\lambda)^*\vec{e_i}, \vec{e_i}\rangle d\lambda \leq c_i,$$

où $G_\infty(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \Pi_n(\lambda)$. Par hypothèse on a $\mu_j \neq 1$ pour $j = 2, \ldots, d$, de sorte que (cf. lemme 2.1),

$$G_\infty(\lambda)^*\vec{e_i} = \hat{\sigma^i}(\lambda)\vec{e_1}, \ \ \forall i = 1, \ldots, d.$$

Il en résulte que

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\sigma^i}(\lambda)|^2 \langle F_0(0)\vec{e_1}, \vec{e_1}\rangle d\lambda \leq c_i,$$

soit,

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\sigma^i}(\lambda)|^2 d\lambda \leq c_i,$$

ce qui prouve la propriété annoncée.

Preuve du lemme 5.2. Pour toute fonction F dans $\mathcal{C}_d$, nous obtenons, grâce aux changements de variables $\lambda \longrightarrow \frac{\lambda}{2}$ et $\lambda \longrightarrow \frac{\lambda}{2} + \pi$, l'identité

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} P_G F(\lambda) d\lambda &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} G(\lambda) F(\lambda) G(\lambda)^* d\lambda \\
&+ 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} G(\lambda) F(\lambda) G(\lambda)^* d\lambda,
\end{aligned}$$

soit encore, puisque les fonctions G, F sont 2π-périodiques,

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_G F(\lambda) d\lambda = 2 \int_{-\pi}^{\pi} G(\lambda) F(\lambda) G(\lambda)^* d\lambda.$$

Grâce au changement de variables $\lambda \longrightarrow 2\lambda$ dans l'intégrale du membre de droite, le lemme est prouvé pour $n = 1$.

Procédons à présent par récurrence et supposons l'identité du lemme vérifiée pour un entier $n \geq 1$ arbitrairement donné. Grâce au changement de variables $\lambda \longrightarrow 2^n\lambda$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} P_G^{n+1} F(\lambda) d\lambda &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} P_G^n (P_G F)(\lambda) d\lambda \\
&= 2 \int_{-\pi}^{\pi} \Pi_n(2^n\lambda) P_G F(\lambda) \Pi_n(2^n\lambda)^* d\lambda
\end{aligned}$$

Grâce à l'expression de $P_G F$ et aux changements de variables $\lambda \longrightarrow \frac{\lambda}{2}$ et $\lambda \longrightarrow \frac{\lambda}{2} + \pi$, nous obtenons finalement

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} P_G^{n+1} F(\lambda) d\lambda &= 2^{n+1} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \Pi_n(2^{n+1}\lambda) G(\lambda) F(\lambda) G(\lambda)^* \Pi_n(2^{n+1}\lambda)^* d\lambda \right] \\
&= 2^{n+1} \int_{-\pi}^{\pi} \Pi_{n+1}(2^{n+1}\lambda) F(\lambda) \Pi_{n+1}(2^{n+1}\lambda)^* d\lambda
\end{aligned}$$

et l'on conclut grâce au changement de variables $2^{n+1}\lambda \longrightarrow \lambda$.

Preuve du lemme 5.3 D'après l'identification établie précédemment, nous définissons la norme $\| \cdot \|_1$ sur E_d^N par

$$\|F\|_1 = \|\vec{F}\|_3 \ \ (F \in E_d^N).$$

Désignons maintenant par Γ, l'ensemble des éléments F de E_d^N vérifiant $F(0)\vec{e_1} = \vec{e_1}$, $\|F\|_1 \leq \|I\|_1$ et $F(\lambda) \geq 0$, $\forall \lambda \in [-\pi, \pi]$. Notons que $I \in \Gamma$. Par ailleurs, il est clair que Γ est un convexe, fermé et borné pour la norme $\| \cdot \|_1$. Puisque $\dim E_d^N < +\infty$, Γ est finalement un convexe compact. De plus si F est élément de Γ, alors on a

$P_G F(0)\vec{e_1} = \vec{e_1}$ (d'après (37) et(38)),

$\|P_G F\|_1 = \|Q\vec{F}\|_3 \leq \|\vec{F}\|_3 = \|F\|_1,$

$P_G F(\lambda) \geq 0, \forall\lambda \in [-\pi, \pi]$ (cf paragraphe 4).

Autrement dit, l'opérateur P_G conserve l'ensemble Γ. Le théorème de Schauder-Tychonoff (cf [8]) assure alors l'existence dans Γ d'un point fixe F_0 ($P_G F_0 = F_0$), ce qui prouve le lemme. □

Remarque Le fait que H soit un polynôme trigonométrique n'intervient que dans la démonstration du lemme 5.3. Mais cette hypothèse est alors fondamentale puisqu'elle permet de restreindre l'opérateur P_H à un espace de dimension finie, ce qui assure la compacité du convexe Γ défini à l'occasion de ce lemme. Si on se place dans le cas général où H est une fonction matricielle quelconque de classe $\mathcal{C}^\alpha$, on peut évidemment définir (par exemple dans $\mathcal{C}_d$) l'analogue du convexe Γ mais la compacité de ce dernier n'est plus assurée à priori. En revanche, si l'on sait à l'avance que P_H admet un élément F dans $\mathcal{C}_d$ P_H-invariant, vérifiant $F(0)\vec{e_1} = \vec{e_1}$ et tel que $F(\lambda)$ soit hermitienne, positive pour tout réel λ, alors les fonctions $\hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_d$ solutions de l'équation (5) associée à H sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ (ceci évidemment sous les hypothèses (37) et (38)). Il suffit en effet d'appliquer le lemme 5.2 à la fonction matricielle F et de procéder comme pour le théorème 5.1. Nous montrerons dans le paragraphe 7 qu'une telle fonction F existe si on a $\sup_{n\geq 1} \|P_H^n I\|_\infty < +\infty$. Cette dernière propriété est en particulier satisfaite quand $H(\lambda)H(\lambda)^* + H(\lambda+\pi)H(\lambda+\pi)^* \leq Id$ (dans le cas d'égalité dans cette dernière condition, la fonction $F = I$ convient).

5.2. Etude de (P3)

Les données concernant ce paragraphe sont les suivantes.

- H vérifie (32) et la condition

$$\forall\lambda \in Z_{2dN},\ \lambda \neq 0,\ \exists\mu \in \mathcal{C}(\lambda) \text{ tel que } \det H(\mu+\pi) \neq 0. \tag{42}$$

- Il existe d fonctions $\hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_d$ de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation fonctionnelle (5) associée à H.

La condition (42) constitue la généralisation naturelle au cadre vectoriel des hypothèses du cas scalaire établies dans [1], [2], [5].

Nous notons θ la série matricielle associée à $\phi_1, \ldots, \phi_d$.

Théorème 5.4. *Sous les conditions (32) et (42) les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

$$- \{T^k\phi_i, i = 1, \ldots, d, k \in \mathbb{Z}\} \textit{ est un système de Riesz} \tag{43}$$

$$- \det\theta(0) \neq 0. \tag{44}$$

Démonstration :

Rappelons que θ est élément de E_d^N. C'est en particulier une fonction continue.

L'implication (43) $\Rightarrow$ (44) est évidente.

Réciproquement, supposons la condition (44) vérifiée. Nous devons prouver la double inégalité (12). Or le réel $c_2 = \sup_{\lambda \in [-\pi,\pi]} |\theta(\lambda)|_2$ est fini, ce qui s'écrit encore

$$\theta(\lambda) \leq c_2 \, Id, \;\; \forall \lambda \in [-\pi, \pi].$$

Soit à présent μ la fonction positive définie sur $[0, 2\pi]$ par

$$\mu(\lambda) = \inf_{\|\vec{x}\|_2 = 1} \langle \theta(\lambda)\vec{x}, \vec{x} \rangle.$$

μ est une fonction continue sur $[0, 2\pi]$ d'après le lemme 3.6. Par conséquent, pour prouver la première inégalité de (12), il suffit de montrer que la fonction μ ne s'annule pas sur $[0, 2\pi]$, ou (ce qui revient au même) que la fonction $D : \lambda \rightarrow \det \theta(\lambda)$ vérifie cette même propriété. Ceci va résulter du

Lemme 5.5. *S'il existe $\lambda \in [0, 2\pi]$ tel que $D(\lambda) = 0$ alors la fonction D est nulle.*

Puisque par hypothèse on a $D(0) \neq 0$, l'implication (44)$\Rightarrow$(43) sera finalement démontrée si nous prouvons le lemme.

Preuve du lemme. Soit $\lambda \in [0, 2\pi]$ tel que $D(\lambda) = 0$. Il existe donc un vecteur $\vec{x}$ non nul dans $\mathbf{C}^d$ tel que $\langle \theta(\lambda)\vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$, d'où, d'après (31),

$$\langle \theta(\frac{\lambda}{2}) H(\frac{\lambda}{2})^* \vec{x}, H(\frac{\lambda}{2})^* \vec{x} \rangle + \langle \theta(\frac{\lambda}{2} + \pi) H(\frac{\lambda}{2} + \pi)^* \vec{x}, H(\frac{\lambda}{2} + \pi)^* \vec{x} \rangle = 0.$$

- Si $H(\frac{\lambda}{2})^* \vec{x} \neq \vec{0}$ alors $D(\frac{\lambda}{2}) = 0$.

- Si $H(\frac{\lambda}{2} + \pi)^* \vec{x} \neq \vec{0}$, alors de même $D(\frac{\lambda}{2} + \pi) = 0$.

En utilisant (32), nous avons finalement prouvé l'implication

$$D(\lambda) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} D(\frac{\lambda}{2}) = 0 \\ \text{ou} \\ D(\frac{\lambda}{2} + \pi) = 0 \end{array} \right. \qquad (\mathcal{P})$$

Nous obtenons en particulier pour $k = 0, 1$ (cf notation du paragraphe 4.4 :

$$\text{si } \det H(T_k\lambda) \neq 0, \text{ alors } \;\; D(\lambda) = 0 \Rightarrow D(T_k\lambda) = 0. \qquad (\mathcal{P}')$$

1er cas : $\lambda \notin Z$. La propriété $(\mathcal{P})$ itérée $2dN$ fois assure l'existence d'au moins $2dN+1$ racines distinctes de D. Mais puisque D est un polynôme trigonométrique à coefficients complexes de degré $\leq 2dN$, nous en déduisons que D est nulle.

2ème cas : $\lambda \in Z$. Si $\lambda \notin Z_{2dN}$, alors il existe $\mu \in \mathcal{C}(\lambda)$ tel que $\det H(\mu + \pi) \neq 0$ (sinon, $\lambda \longrightarrow \det H(\lambda)$ posséderait plus de $2dN$ racines). De même si $\lambda \in Z_{2dN}$, la propriété ci-dessus est vérifiée d'après (42). Ainsi dans les deux cas, il existe au moins un entier p et p éléments $\delta_1, \ldots, \delta_p$ de $\{T_0, T_1\}$ tels que

$$\begin{cases} \delta_1 \ldots \delta_p \lambda \in \mathcal{C}(\lambda) \\ \det H(\delta_1 \ldots \delta_p \lambda + \pi) \neq 0. \end{cases}$$

L'itération de la propriété $(\mathcal{P})$ conduit aux deux éventualités suivantes :

- ou bien il existe un entier $\ell \in \{2, \ldots, p\}$ tel que $D(\{a\}) = 0$ où $a = \delta_\ell \cdots \delta_p \lambda + \pi$. Mais alors d'après le lemme 4.3, nous savons que $\{a\} \notin Z$ et l'on conclut grâce au premier cas appliqué au réel $\{a\}$.

- sinon, nous obtenons après $p-1$ itérations de $(\mathcal{P})$, $D(\delta_2 \cdots \delta_p \lambda) = 0$. Mais puisque $\det H(\{\delta_1 \ldots \delta_p \lambda + \pi\}) \neq 0$, nous obtenons grâce à $(\mathcal{P}')$ $D(\{\delta_1 \ldots \delta_p \lambda + \pi\}) = 0$, et nous concluons comme précédemment puisque $\{\delta_1 \cdots \delta_p \lambda + \pi\} \notin Z$. Le lemme est ainsi prouvé. $\square$

Remarques :

1. Dans le cas scalaire on a $\theta(0) = \hat{\phi}(0) = 1$ par construction, de sorte que la condition (44) est toujours vérifiée. Nous préciserons le théorème 5.4 relatif au cas scalaire dans le paragraphe 5.3.

2. Plaçons-nous dans le cas $d = 2$ et supposons que H vérifie (37) et (38) avec $M = Id$. Rappelons que cette dernière condition entraîne (34) (cf démonstration du lemme 4.2.), de sorte que
$$\theta(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} |\hat{\phi}_2(2k\pi)|^2 \end{pmatrix}$$
On en conclut que $\det \theta(0) \neq 0$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$, tel que $\hat{\phi}_2(2k\pi) \neq 0$.

3. Si (43) est vérifiée, alors la matrice P vérifie (39).

   En effet, soit $\mathcal{H}(d, \mathbf{C})$ le sous-espace de $\mathcal{M}(d, \mathbf{C})$ formé des matrices hermitiennes et $\mathcal{H}^d$ l'espace des fonctions matricielles 2π-périodiques, continues et à valeurs dans $\mathcal{H}(d, \mathbf{C})$. Définissons sur l'espace $\mathcal{H}^d$ l'opérateur R donné par
$$RF = \theta^{-1/2} P_H (\theta^{1/2} F \theta^{1/2}) \theta^{-1/2}.$$
   R est un opérateur positif au sens défini dans le paragraphe 4 et vérifie $RI = I$.

   Soit sur $\mathcal{H}^d$ la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|F\|_\infty = \sup_{\lambda \in [-\pi,\pi]} |F(\lambda)|_2$. $\|F\|_\infty \leq 1$ équivaut à écrire $-Id \leq F(\lambda) \leq Id$, $\forall \lambda \in [-\pi, \pi]$, et puisque R est positif, cette double inégalité entraîne que $-Id \leq RF(\lambda) \leq Id$, $\forall \lambda [-\pi, \pi]$. Autrement dit, nous avons prouvé la propriété $\|RF\|_\infty \leq \|F\|_\infty$, $\forall F \in \mathcal{H}^d$. Définissons la norme $\|\cdot\|_1$ sur $\mathcal{H}^d$ par
$$\|F\|_1 = \|\theta^{-1/2} F \theta^{-1/2}\|_\infty.$$

Alors, on a $\|P_H F\|_1 = \|\theta^{-1/2} P_H F \theta^{-1/2}\|_\infty = \|\theta^{-1/2} P_H(\theta^{1/2} F' \theta^{1/2})\theta^{-1/2}\|_\infty$ où l'on a posé $F'(\lambda) = \theta^{-1/2}(\lambda)F(\lambda)\theta^{-1/2}(\lambda)$, d'où, $\|P_H F\|_1 = \|RF'\|_\infty \leq \|F'\|_\infty = \|F\|_1$. Si pour $\vec{F} \in I\!R^\nu$ nous posons $\|\vec{F}\| = \|F\|_1$, alors on obtient $\|P\vec{F}\| = \|P_H F\|_1 \leq \|F\|_1 = \|\vec{F}\|$, soit la propriété (39).

Nous énonçons maintenant un résultat qui va préciser la dimension de $\mathrm{Ker}(id - P)$ dans le cadre du théorème 5.4.

Proposition 5.6. *Si la fonction matricielle H vérifie la condition (42) et s'il existe un élément F_0 de E_d^N, P_H-invariant telle que, pour tout réel λ, $F_0(\lambda)$ soit hermitienne positive, non dégénérée, alors on a*

$$\dim \mathrm{Ker}(id - P) \leq d^2. \tag{45}$$

Remarque En particulier sous l'hypothèse (43), la propriété (45) est vérifiée : il suffit en effet de considérer $F_0 = \theta$. Dans le cas scalaire, nous obtenons donc $\mathrm{Ker}(id - P) = \mathbb{C}\ \theta$. Ce résultat est essentiel. En effet, supposons que H vérifie la condition appelée "condition orthogonale", à savoir

$$|H(\lambda)|^2 + |H(\lambda + \pi)|^2 = 1, \quad \forall \lambda \in [0, 2\pi].$$

Cette propriété exprime que la fonction $\mathbf{1}$, identiquement égale à 1 sur $[0, 2\pi]$ est P_H-invariante, ou plus précisément que $\mathbf{1} \in \mathrm{Ker}(P - id)$. Puisqu'on a $\theta(0) = 1$, nous en déduisons finalement que $\theta = \mathbf{1}$. Revenant à la définition de θ, nous en concluons, grâce à la formule sommatoire de Poisson, que le système $(\phi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est orthonormé.

Démonstration de la proposition 5.6 :

Supposons que $\dim \mathrm{Ker}(P - id) > d^2$. Alors il existe $d^2 + 1$ fonctions $F_1, \ldots, F_{d^2+1}$ linéairement indépendantes dans $\mathrm{Ker}(P - id)$. Cependant les matrices $F_1(0), \ldots, F_{d^2+1}(0)$ sont linéairement dépendantes dans $\mathcal{M}(d, \mathbb{C})$, à savoir : il existe un élément non nul $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{d^2})$ de $\mathbb{C}^{d^2+1}$ tel que $\sum_{i=1}^{d^2+1} \beta_i F_i(0) = 0$. Définissons les fonctions matricielles K et L par

$$K(\lambda) = \sum_{i=1}^{d^2+1} \beta_i F_i(\lambda)$$

et

$$L(\lambda) = F_0^{-1/2}(\lambda) K(\lambda) F_0^{-1/2}(\lambda)$$

Nous allons montrer que la fonction K est nulle, ce qui évidemment contredira l'indépendance linéaire des éléments F_i. Nous allons pour cela utiliser un procédé analogue à celui établi dans la démonstration du théorème 2. Définissons l'opérateur R sur $\mathcal{C}^d$ par

$$R\ E(\lambda) = F_0^{-1/2}(\lambda) P_H(F_0^{1/2} E\ F_0^{1/2})(\lambda) F_0^{-1/2}(\lambda).$$

R est un opérateur positif, au sens défini dans le paragraphe 4. Les fonctions matricielles I et L sont invariantes par R et celui-ci s'écrit aussi

$$R\,E(\lambda) = S(\frac{\lambda}{2})E(\frac{\lambda}{2})S(\frac{\lambda}{2})^* + S(\frac{\lambda}{2}+\pi)E(\frac{\lambda}{2}+\pi)S(\frac{\lambda}{2}+\pi)^*, \tag{46}$$

avec $S\ (\lambda) = F_0^{-1/2}(2\lambda)H(\lambda)F_0^{1/2}(\lambda)$. Puisqu'on a $RI = I$, la fonction S vérifie

$$S(\lambda)S(\lambda)^* + S(\lambda+\pi)S(\lambda+\pi)^* = Id, \ \ \forall\lambda \in [0, 2\pi]. \tag{47}$$

Par définition de la fonction matricielle S, l'ensemble $Z(s)$ des zéros de la fonction $s : \lambda \longrightarrow \det S(\lambda)$ est exactement l'ensemble des zéros de $\lambda \longrightarrow \det H(\lambda)$: $Z(s)$ est donc un ensemble fini, de cardinal inférieur ou égal à $2dN$.

Soit maintenant les fonctions μ et ν définies sur $[0, 2\pi]$ par

$$\mu(\lambda) = \sup_{\|\vec{x}\|_2=1} \langle L(\lambda)\vec{x}, \vec{x}\rangle$$

et

$$\nu(\lambda) = \inf_{\|\vec{x}\|_2=1} \langle L(\lambda)\vec{x}, \vec{x}\rangle$$

D'après le lemme 3.6., ces deux fonctions sont continues sur $[0, 2\pi]$. Il existe donc deux réels a et b dans $[0, 2\pi]$ tels que

$$\mu(a) = \sup_{\lambda\in[0,2\pi]} \mu(\lambda) = M$$

et

$$\nu(b) = \inf_{\lambda\in[0,2\pi]} \nu(\lambda) = m.$$

Il existe un vecteur $\vec{x}$ dans $\mathbf{C}^{\,d}$ ($\|\vec{x}\|_2 = 1$) vérifiant $\mu(a) = \langle L(a)\vec{x}, \vec{x}\rangle$ d'où, puisque $RL = L$,

$$\mu(a) = \langle L(\frac{a}{2})S(\frac{a}{2})^*\vec{x}, S(\frac{a}{2})^*\vec{x}\rangle + \langle L(\frac{a}{2}+\pi)S(\frac{a}{2}+\pi)^*\vec{x}, S(\frac{a}{2}+\pi)^*\vec{x}\rangle.$$

- Si $S(\frac{a}{2})^*\vec{x} \neq \vec{0}$, alors l'hypothèse $\mu(\frac{a}{2}) < \mu(a)$ conduit à

$$\mu(a) < \mu(a)[\langle(S(\frac{a}{2})S(\frac{a}{2})^* + S(\frac{a}{2}+\pi)S(\frac{a}{2}+\pi)^*)\vec{x}, \vec{x}\rangle]$$

d'où, d'après (47), $\mu(a) < \mu(a)$, ce qui est absurde.

- De la même manière, si $S(\frac{a}{2}+\pi)^*\vec{x} \neq \vec{0}$, alors l'hypothèse $\mu(\frac{a}{2}+\pi) < \mu(a)$ entraîne une contradiction.

En outre, d'après (47), l'une des deux hypothèses ci-dessus est vérifiée. Par conséquent nous avons prouvé l'implication suivante :

$$\mu(a) = M \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mu(\frac{a}{2}) = M \\ \text{ou} \\ \mu(\frac{a}{2}+\pi) = M \end{array} \right. \qquad (\mathcal{P})$$

En particulier, nous obtenons pour $k = 0, 1$:

Si $s(T_k a) \neq 0$, alors $\mu(a) = M$ entraîne $\mu(T_k a) = M$. $(\mathcal{P}')$

Nous allons itérer ce raisonnement en supposant dans un premier temps $a \neq 0$.

1er cas : $a \notin Z$. D'après la propriété 3. du lemme 4.3, il existe un entier $\ell \geq 1$ tel que l'on ait : $\forall n > \ell$, $\forall \delta_1, \dots, \delta_n \in \{T_0, T_1\}, \delta_1 \dots \delta_n\ a \notin Z(s)$. Or, l'itération ($\ell + 1$ fois) de la propriété $(\mathcal{P})$ assure l'existence de $\ell + 1$ éléments $\delta_1, \dots, \delta_{\ell+1}$ de $\{T_0, T_1\}$ tels que $\mu(\delta_1 \dots \delta_{\ell+1} a) = M$. Posons $\lambda = \delta_1 \dots \delta_{\ell+1} a$. D'après la remarque ci-dessus, nous obtenons en particulier, pour tout entier $k \geq 0$, $T_0^k \lambda = \frac{\lambda}{2^k} \notin Z(s)$. On utilise alors la propriété $(\mathcal{P}')$ pour conclure finalement que $\mu(\frac{\lambda}{2^k}) = \mu(a)$, $\forall k \geq 0$, d'où, par continuité, $\mu(a) = \mu(0) = 0$ (puisque $K(0) = 0$).

2ème cas : $a \in Z$. Si $a \in Z - Z_{2dN}$, il existe $\mu \in \mathcal{C}(a)$ tel que $s(\mu + \pi) \neq 0$ (sinon, $Z(s)$ contiendrait plus de $2dN$ éléments). Si $a \in Z_{2dN}$, la propriété ci-dessus est encore vérifiée d'après (42). Ainsi dans les deux cas, il existe au moins un entier $p \geq 1$ et p éléments $\delta_1, \dots, \delta_p$ de $\{T_0, T_1\}$ tels que

$$\begin{cases} \delta_1 \dots \delta_p a \in \mathcal{C}(a) \\ s(\delta_1 \dots \delta_p a + \pi) \neq 0 \end{cases}.$$

On procède alors comme dans la démonstration du théorème 5.4, à savoir :

- S'il existe $\ell \in \{2, \dots, p\}$ tel que $\mu(\delta_\ell \dots \delta_p a + \pi) = M$, alors on conclut grâce au 2. du lemme 4.3 en se ramenant au 1er cas.

- Sinon, la propriété $(\mathcal{P})$ itérée $p - 1$ fois conduit à $\mu(\delta_2 \dots \delta_p a) = M$, et l'on conclut grâce au lemme 4.3 et à $(\mathcal{P}')$, en se ramenant à nouveau au 1er cas (remarquer pour cela que $\{\delta_1 \dots \delta_p a + \pi\}$ est l'image par T_0 ou T_1 de $\delta_2 \dots \delta_p a$).

En conclusion si $a \neq 0$, alors $\mu(a) = 0$ et cette égalité est évidemment vérifiée si $a = 0$. Un raisonnement du même type appliqué au réel b entraîne $\nu(b) = 0$. Les fonctions matricielles L et K sont donc nulles et la proposition est ainsi démontrée. □

Remarque Sous les hypothèses de la proposition 5.6, on peut aussi démontrer le résultat suivant. Deux éléments G et E de E_d^N invariant par P_H coïncident si et seulement si $G(0) = E(0)$ (poser $K = G - E$ et appliquer le raisonnement ci-dessus).

5.3. Exemples.

- **Cas** $d = 1$.

On sait que la condition (42) est nécessaire à (P3) (cf. [1], [2], [5]). Nous reprenons la démonstration de cette propriété à l'occasion de la proposition ci-dessous qui résume les résultats du paragraphe précédent obtenu dans le cas scalaire. Nous utiliserons les notations et définitions du paragraphe précédent avec $d = 1$.

Proposition 5.7. *Etant donné un polynôme trigonométrique scalaire H vérifiant $H(0) =$*

1 et $H(\pi) = 0$, la fonction $\hat{\phi}$ définie par $\hat{\phi}(\lambda) = \prod_{k=1}^{+\infty} H(\frac{\lambda}{2^k})$ est de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ et la famille composée des translatés entières de la fonction ϕ forme un système de Riesz si, et seulement si, H vérifie les conditions (32), (42) et la matrice P les propriétés (39) ou (40).

Démonstration : Supposons vérifiée la première assertion de l'équivalence. Alors, H vérifie la condition (32) (cf. lemme 4.1) et P la condition (39) (cf. remarque 3 du paragraphe précédent). Pour prouver (42), nous procédons par l'absurde en supposant qu'il existe $\lambda \in Z_{2N}$ tel que l'on ait

$$H(\mu + \pi) = 0, \ \forall \mu \in \mathcal{C}(\lambda). \tag{48}$$

Nous allons montrer que $\hat{\phi}(\lambda + 2\ell\pi)$ est nul pour tout entier ℓ, ce qui entraîne que $\theta(\lambda)$ est nul et constitue par conséquent une contradiction (nous avons noté θ la série scalaire associée à la fonction ϕ). Le fait que H soit un polynôme trigonométrique ne joue aucun rôle ici. Soit $\ell \in \mathbb{Z}$ quelconque et posons $\lambda_0 = \lambda + 2\ell\pi$, puis $\lambda_k = \frac{\lambda_0}{2^k}$ pour tout entier naturel k. Commençons par remarquer qu'on a pour tout réel x,

$$\{\frac{x}{2}\} = \begin{cases} \frac{\{x\}}{2} \\ \text{ou} \\ \frac{\{x\}}{2} + \pi. \end{cases}$$

En effet il existe par définition un entier p tel que $\frac{x}{2} = \{\frac{x}{2}\} + 2p\pi$, d'où $x = 2\{\frac{x}{2}\} + 4p\pi$. Considérant les cas $\{\frac{x}{2}\} \in [0, \pi]$, puis $\{\frac{x}{2}\} \in [\pi, 2\pi]$, on prouve aisément la propriété ci-dessus.

Suivant les notations du paragraphe 4.4, nous déduisons de ce qui précède qu'il existe une famille $(\delta_k)_{k\geq 1}$ d'éléments de $\{T_0, T_1\}$ telle que l'on ait pour tout entier $k \geq 1$, $\{\lambda_k\} = \delta_k \cdots \delta_1 \lambda$.

Considérons à présent le plus petit entier k pour lequel $\frac{\lambda_0}{2^{k+1}} \in [0, 2\pi[$ et écrivons

$$\hat{\phi}(\lambda_0) = H(\delta_1\lambda) \cdots H(\delta_k \cdots \delta_1 \lambda) \prod_{r=1}^{+\infty} H(\frac{\lambda_0}{2^{k+r}}).$$

D'après (32) et (48), on a ou bien $H(\delta_1\lambda) = 0$ et $H(\delta_1\lambda + \pi) \neq 0$ au quel cas $\hat{\phi}(\lambda_0) = 0$, ou bien $H(\delta_1\lambda) \neq 0$ et $H(\delta_1\lambda + \pi) = 0$ au quel cas $\delta_1\lambda \in \mathcal{C}(\lambda)$. Dans le second cas, on réitère le raisonnement en remplaçant λ par $\delta_1\lambda$ pour en déduire qu'on a ou bien $\hat{\phi}(\lambda_0) = 0$, ou bien $\delta_2\delta_1\lambda \in \mathcal{C}(\lambda)$. L'itération de cette démarche conduit aux deux situations suivantes :

- ou bien il existe un entier sur $\{1, \ldots, k\}$ tel que $H(\delta_m \cdots \delta_1 \lambda) = 0$ et on en déduit que $\hat{\phi}(\lambda_0) = 0$.

- ou bien les réels $\delta_1\lambda, \ldots, \delta_k \cdots \delta_1\lambda$ appartiennent à $\mathcal{C}(\lambda)$. Dans ce cas, on réitère à nouveau le raisonnement initial en remplaçant λ par $\delta_k \cdots \delta_1 \lambda$ pour en déduire qu'on a ou bien $\hat{\phi}(\lambda_0) = 0$, ou bien $\frac{\lambda_0}{2^{k+1}} \in \mathcal{C}(\lambda)$ etc... Mais l'ensemble $\mathcal{C}(\lambda)$ est fini de sorte que $\frac{\lambda_0}{2^{k+r}}$ ne peut appartenir à $\mathcal{C}(\lambda)$ pour tout entier $r \geq 1$ et on en déduit qu'il existe nécessairement un entier $r \geq 1$ pour lequel $H(\frac{\lambda_0}{2^{k+r}})$ est nul.

Ainsi, on conclut dans tous les cas de figure que $\hat{\phi}(\lambda_0)$ est nul, ce qui prouve la propriété annoncée et achève la preuve de l'implication directe. La réciproque résulte des paragraphes 5.1 et 5.2. La condition (39) entraîne que ϕ appartient à $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ (théorème 5.1) et nous savons qu'alors, sous les hypothèses (32) et (42), la famille des translatés entières de ϕ forme une base de Riesz (cf. théorème 5.4). $\square$

De nombreux exemples relatifs au cas $d = 1$ sont donnés dans [2], [6]. Nous ne présentons ici que des exemples classiques et simples afin d'utiliser les résultats précédents. Notons que l'opérateur P_H s'écrit

$$P_H F(\lambda) = U(\frac{\lambda}{2})F(\frac{\lambda}{2}) + U(\frac{\lambda}{2}+\pi)F(\frac{\lambda}{2}+\pi)$$

où

$$U(\lambda) = H(\lambda)\overline{H(\lambda)}.$$

La solution de l'équation fonctionnelle (2) est donnée par $\hat{\phi}(\lambda) = \prod_{k=1}^{+\infty} H(\frac{\lambda}{2^k})$ et les conditions sur H s'écrivent ici $U(0) = 1$ et $U(\pi) = 0$.

Exemple 1 : $H(\lambda) = \frac{1}{2}(1 + e^{i\lambda})$.

H vérifie les conditions (42), (32) et (41) de sorte que la solution $\hat{\phi}_0$ est de carré intégrable et la famille $\{T^k\phi_0, k \in \mathbb{Z}\}$ un système de Riesz. Plus exactement, H vérifie la condition orthogonale $(U(\lambda) + U(\lambda+\pi) = 1)$. D'après la proposition 5.6, le système écrit ci-dessus est orthonormé. A titre indicatif, P_H opère sur le $\mathbb{R}$-espace-vectoriel E_1 engendré par $\{\mathbf{1}, \cos\}$ et la matrice P est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Evidemment, nous pouvons retrouver tous ces résultats par un calcul direct puisqu'on a

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_0(\lambda) &= e^{i\frac{\lambda}{2}} \prod_{k=1}^{+\infty} \cos(\frac{\lambda}{2\cdot 2^k}) \\ &= e^{i\frac{\lambda}{2}} \frac{\sin\lambda/2}{\lambda/2}, \end{aligned}$$

soit, $\phi_0 = 1_{[0,1]}$. Rappelons que ϕ_0 est la fonction d'échelle correspondant au système de Haar.

Exemple 2 : $H(\lambda) = \frac{1}{2}(1 + e^{i3\lambda})$.

H vérifie (41) et plus précisément la condition orthogonale. La solution $\hat{\phi}$ est donc de carré intégrable. Par contre, H ne vérifie pas (42). En effet, $\frac{2\pi}{3} \in Z_2$ et $H(\frac{5\pi}{3}) =$

$H(\frac{\pi}{3}) = 0$. On en déduit que la famille composée des translatés entières de ϕ n'est pas une base de Riesz. P_H opère sur l'espace E_2 engendré par $\{1, \cos, \cos 2\}$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de P sont $+1$ et $-\frac{1}{2}$ et $\mathrm{Ker}(Id - P)$ est le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $y + 2z = 0$.

Il est possible là encore d'effectuer un calcul direct, à savoir :

$$\hat{\phi}(\lambda) = 2e^{i3\lambda/2}\frac{\sin 3\lambda/2}{3\lambda},$$

soit, $\phi = \dfrac{1}{3}1_{[0,3]}$. Il est clair qu'on a pour tout entier k, $\hat{\phi}(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi) = 0$, de sorte que $\theta(\dfrac{2\pi}{3}) = 0$ et on retrouve ainsi que le système $\{T^k\phi, k \in \mathbb{Z}\}$ n'est pas un système de Riesz.

Exemple 3 : $H(\lambda) = (\frac{1+e^{i\lambda}}{2})^2$

H vérifie (41), (32) et (42), de sorte que $\{T^k\phi, k \in \mathbb{Z}\}$ est un système de Riesz. La matrice P relative à la base donnée dans l'exemple 1 est définie par

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de P sont $+1$ et $\dfrac{1}{4}$.

Enfin, il est clair que $\hat{\phi}(\lambda) = (\hat{\phi}_0(\lambda))^2$, d'où

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi_0 * \phi_0(x) \\ &= (1+x)1_{[-1,0]}(x) + (1-x)1_{[0,1]}(x). \end{aligned}$$

Notons que ϕ vérifie $\phi(n) = \delta_{0,n}$, $n \in \mathbb{Z}$. Si nous désignons par V_0 l'espace engendré par le système $\{T^k\phi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, alors toute fonction f dans V_0 s'écrit $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)T^k\phi$. Rappelons que ϕ vérifie (1), c'est-à-dire ici

$$\phi(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}\phi(x-1) + \phi(x) + \frac{1}{2}\phi(x+1).$$

Par ailleurs, si $f \in V_0$, alors pour tout entier $j \geq 0$, $D^{-j}f \in V_0$, de sorte que $f(2^{-j}x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(2^{-j}k)T^k\phi(x)$. Si $x = n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, cette identité devient grâce à la précédente

$$f(2^{-j}n + 2^{-(j+1)}) = \frac{1}{2}f(2^{-j}n) + \frac{1}{2}f(2^{-j}(n+1)).$$

(nous reprendrons ces calculs dans le paragraphe 6)

Cette formule est appelée formule d'interpolation dyadique [4], [7], [10]. Elle permet, partant de la suite $(f(k))_{k\in\mathbb{Z}}$, de déterminer successivement pour $j = 0,1,2,\dots$, les valeurs de f sur les dyaliques d'ordre j, et ceci par un procédé indépendant de j.

Nous présentons maintenant une famille d'exemples ne vérifiant par (41).

Exemple 4. Etant donné un réel $a \geq 0$, nous posons $U_a(\lambda) = \cos^2\frac{\lambda}{2} + a\sin^2\lambda$. Le polynôme trigonométrique H_a défini par $H_a(\lambda) = (\frac{1+e^{i\lambda}}{2})(\alpha+\beta e^{i\lambda})$ avec $\beta = (\frac{1+2a+\sqrt{1+4a}}{2})^{1/2}$ et $\alpha = -\frac{a}{\beta}$ vérifie $H_a(\lambda)\overline{H_a(\lambda)} = U_a(\lambda)$. P_{H_a} opère sur E_1 et on a

$$P_a = \begin{pmatrix} 1+a & \frac{1}{2} \\ -a & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

où nous avons désigné par P_a la matrice de l'application P_{H_a} restreinte à E_1. Les valeurs propres de P_a sont $+1$ et $\frac{1}{2}+a$.

Si $a < \frac{1}{2}$ alors d'après la proposition 5.7, la fonction $\hat{\phi}_a$ correspondante appartient à $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ et $\{T^k\phi_a,\ k \in \mathbb{Z}\}$ est un système de Riesz. En revanche si $a \geq \frac{1}{2}$ alors la fonction $\hat{\phi}_a$ correspondante n'est pas de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. En effet H_a satisfait aux conditions (32) et (42), de sorte que si ϕ_a appartenait à $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, la famille composée de translatés entières formerait un système de Riesz et la matrice P_a vérifierait alors la condition (40) (remarque 3 paragraphe 5.2), ce qui n'est pas le cas.

- **Cas $d = 2$**

Exemple 5.

Soient $b, c \in \mathbb{C}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vérifiant $|\alpha+\beta| < 1$, $\bar{c}+2b\beta = 0$, $|b| \leq \frac{1}{2}$ et $\alpha^2+\beta^2 \leq \frac{1}{2}$. Posons

$$H(\lambda) = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\lambda}{2} & b\sin\lambda \\ c\sin\lambda & \alpha+\beta\cos\lambda \end{pmatrix}.$$

Les conditions (37) et (38) sont satisfaites avec $M = Id$ et on montre grâce aux hypothèses ci-dessus sur b, c, α et β que H vérifie (41). Ainsi la matrice P associée satisfait à la condition (39) (cf. remarque 3 du paragraphe 5.1) et nous déduisons du théorème 5.1 que les solutions $\hat{\phi}_1$ et $\hat{\phi}_2$ données par (6) avec $\vec{x} = \vec{e_1}$ sont des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

C'est par exemple le cas si $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{4}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = -\frac{1}{4}$ et on montre en outre dans ce cas que $\det H(\lambda) = \frac{1}{4}\cos^2\frac{\lambda}{2}$, de sorte que H satisfait aux hypothèses (32) et (42). Par ailleurs, on a

$$\hat{\phi}(2\pi) = \lim_{n\to+\infty}\langle\prod_{k=1}^{n} H(\frac{2\pi}{2^k})\vec{e_2}, \vec{e_2}\rangle,$$

soit, $\hat{\phi}_2(2\pi) \simeq 0,1885$. On déduit du théorème 5.4 et de la remarque 2 du paragraphe 5.2 que la famille constituée des translatés entières des fonctions ϕ_1 et ϕ_2 forme un système de Riesz.

Remarque : Il peut arriver que les solutions de l'équation (5) soient relier au cas scalaire et ceci dans les deux cas suivants.

1er cas. Les translatés entières des fonctions ϕ_1 et ϕ_2 solutions de (5) engendrent un espace $\mathcal{V}_0$ qui coïncide avec l'espace V_1 d'une analyse multi-échelle scalaire (cf. exemple 1 paragraphe 1). C'est par exemple le cas si on choisit dans l'exemple ci-dessus $b = c = \frac{1}{2}$ et $\alpha = -\beta = \frac{1}{2}$: l'espace $\mathcal{V}_0$ correspondant coïncide avec l'espace V_1 relatif au système de Haar. Plus précisément, si on pose $\phi_0 = 1_{[0,1]}$ et $\psi_0 = 1_{[0,\frac{1}{2}]} - 1_{[\frac{1}{2},1]}$ (respectivement les fonctions "père" et "mère" relatif au système de Haar), on obtient

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi}_1(\lambda) \\ \hat{\phi}_2(\lambda) \end{pmatrix} = e^{-i\frac{\lambda}{2}} R(\lambda) \begin{pmatrix} \hat{\phi}_0(\lambda) \\ \hat{\psi}_0(\lambda) \end{pmatrix},$$

où $R(\lambda)$ est la rotation d'angle $\frac{\lambda}{2}$. En outre on en déduit que la série matricielle θ associée aux fonctions ϕ_1 et ϕ_2 vérifie $\theta(\lambda) = R(\lambda)R(\lambda)^* = Id$, c'est-à-dire que la famille composée des translatées entières de ϕ_1 et ϕ_2 forme une base orthonormée de l'espace V_1.

2ème cas. L'espace $\mathcal{V}_0$ engendré par les translatés entières des fonctions ϕ_1 et ϕ_2 solutions de (5) coïncide avec la somme vectorielle $S_0 \oplus T_0$ où nous avons désigné par $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ deux analyses multi-échelle scalaires. Nous ne savons pas si ce cas de figure est possible. Nous allons en revanche démontrer le résultat suivant.

Soient h et g deux fonctions d'échelle scalaires vérifiant $|h(x)| + |g(x)| \leq c(1 + |x|^{-2})$. Alors, la famille composée des translatés entières des fonctions h et g ne forme pas un système de Riesz. En effet, notons θ la série matricielle associée aux fonctions h et g et rappelons qu'on a $\hat{h}(2k\pi) = \hat{g}(2k\pi) = \delta_{0,k}$ $(k \in \mathbb{Z})$. La localisation des fonctions h et g montre que θ est continue (cf.[14]). On déduit la propriété annoncée de la proposition 3.1 et de l'égalité évidente

$$\theta(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Interpolation d'Hermite

Nous reprenons les définitions et notations établies dans l'exemple 2 du §1. Le cas $r = 1$ correspond à l'exemple 3 ci-dessus.

Exemple 6. $r = 2$. Les deux fonctions principales ϕ_0 et ϕ_1 sont définies par

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_0(x) &= r(-x)1_{[-1,0]}(x) + r(x)1_{[0,1]}(x) \\ \hat{\phi}_1(x) &= s(-x)1_{[-1,0]}(x) + s(x)1_{[0,1]}(x) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} r(x) &= (x-1)^2(2x+1) \\ s(x) &= (x-1)^2 x. \end{aligned}$$

Un calcul simple donne

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_0(\lambda) &= -12\left(\frac{\sin\lambda}{\lambda^3} + 2\frac{\cos\lambda - 1}{\lambda^4}\right) \\ \hat{\phi}_1(\lambda) &= 4i\left[\frac{2+\cos\lambda}{\lambda^3} - \frac{3\sin\lambda}{\lambda^4}\right] \end{aligned}$$

Par passage à la transformée de Fourier dans (8), la fonction

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_0 \\ \hat{\phi}_1 \end{pmatrix}$$

vérifie $\hat{V}(\lambda) = H(\frac{\lambda}{2})\hat{V}(\frac{\lambda}{2})$ avec

$$H(\lambda) = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\lambda}{2} & -\frac{3}{4} i \sin \lambda \\ \frac{i}{8} \sin \lambda & \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \cos \lambda \end{pmatrix}.$$

Notons que $\det H(\lambda) = \frac{1}{8} \cos^4 \frac{\lambda}{2}$, de sorte que H vérifie les conditions (32) et (42). D'après la remarque (2) du paragraphe 5.2, la famille constituée des translatés entières des deux fonctions principales forme un système de Riesz.

Exemple 7. $r = 3$ Les trois fonctions principales sont définies par

$$\phi_i(x) = p_i(x)\, 1_{[0,1]}(x) + p_i(-x)\, 1_{[-1,0]}(x), \; i = 0, 1, 2$$

où

$$\begin{aligned} p_0(x) &= -6x^5 + 15x^4 - 10x^3 + 1 \\ p_1(x) &= -3x^5 + 8x^4 - 6x^3 + x \\ p_2(x) &= -\frac{1}{2}x^5 + \frac{3}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2. \end{aligned}$$

Comme précédemment, nous déduisons de (8) que la fonction

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_0 \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \end{pmatrix}$$

vérifie (5) avec

$$H(\lambda) = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\lambda}{2} & -\frac{15}{16} i \sin \lambda & 0 \\ \frac{5i}{32} \sin \lambda & \frac{1}{4} - \frac{7}{32} \cos \lambda & -\frac{3}{8} i \sin \lambda \\ \frac{1}{64} \cos \lambda & -\frac{i}{64} \sin \lambda & \frac{1}{8} - \frac{1}{16} \cos \lambda \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons $\det H(\lambda) = 5 \cdot 2^{-9} \cos^6 \frac{\lambda}{2}$. Par conséquent H vérifie les conditions (32) et (42). D'autre part un calcul simple (basé sur la formule sommatoire de Poisson) assure que

$$\theta(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{60} \\ 0 & a & 0 \\ \frac{1}{60} & 0 & \frac{144}{9!} \end{pmatrix}$$

avec $a > 0$, d'où $\det \theta(0) \neq 0$: la famille composée des translatés entières des fonctions ϕ_0, ϕ_1 et ϕ_2 forme un système de Riesz.

6. Interpolation dyadique

Nous nous proposons dans ce paragraphe d'étendre au cadre vectoriel l'interpolation dyadique scalaire définie dans [4], [7], [10]. Nous rappelons dans un premier temps la théorie relative au cas scalaire en reprenant les techniques développées, dans [7] pour les propriétés de l'interpolation dyadique, puis dans [4] concernant le lien avec l'analyse multi-échelle. L'extension au cas vectoriel est naturelle et basée sur des techniques analogues à celles du cas scalaire. Nous étudions en particulier le lien entre l'interpolation dyadique vectorielle et l'équation(5). Enfin nous présentons dans le dernier paragraphe une famille d'exemples tirée de [13].

6.1. Cas scalaire

6.1.1. Définitions

Nous désignerons par E l'ensemble des réels dyadiques, c'est-à-dire de la forme $2^{-r}k,\ r \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}$. Par abus de langage, toute famille $\{f(x), x \in E\}$ est appelée "fonction" définie sur E et nous notons $\mathcal{S}$ et $\mathcal{F}$ respectivement l'espace des suites réelles $(a(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ et l'espace des "fonctions" définies sur E.

Définition : procédé d'interpolation dyadique

Considérons une famille finie $\{c(n),\ n \in \mathbb{Z}\}$ de réels. A toute suite réelle $a = (a(n))_{n\in\mathbb{Z}}$, nous associons la "fonction" f définie sur E par le procédé suivant :

- $f(n) = a(n),\ n \in \mathbb{Z}$.

- pour $r = 0, 1, 2, \ldots$ et $n \in \mathbb{Z}$,

$$f(2^{-r}n + 2^{-(r+1)}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c(n-k) f(2^{-r}k). \tag{49}$$

Par commodité, nous appelons $(\mathcal{D})$ ce procédé (sous-entendu associé à la famille $\{c(n),\ n \in \mathbb{Z}\}$). Notons E_r, pour $r \in \mathbb{N}$, l'ensemble des dyadiques d'ordre r c'est-à-dire de la forme $2^{-r}k,\ k \in \mathbb{Z}$. Les éléments de $E_{r+1} - E_r$ sont exactement les réels de la forme $2^{-r}n + 2^{-(r+1)},\ n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, le procédé $(\mathcal{D})$ est bien défini dans ce sens qu'il permet, partant d'une suite a quelconque, de construire une et une seule "fonction" f définie sur E. Nous dirons que f est la *"fonction" interpolée par $(\mathcal{D})$ partant de a.*

Par abus de notation, nous définissons l'application $\mathcal{D}$ de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{F}$ donnée par $\mathcal{D}(a) = f,\ a \in \mathcal{S}$, où f est la "fonction" interpolée par $(\mathcal{D})$ partant de a. Nous allons établir quelques propriétés de l'applications $\mathcal{D}$. Commençons par rappeler la notion de convergence faible dans les espaces $\mathcal{S}$ et $\mathcal{F}$.

- Nous dirons qu'une suite $(a_k)_{k\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{S}$ converge faiblement vers un élément a de $\mathcal{S}$ si pour tout entier n, la suite réelle $(a_k(n))_{k\geq 0}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers le réel $a(n)$.

- De la même façon, nous dirons qu'une suite $(f_k)_{k\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ converge faiblement vers un élément f de $\mathcal{F}$ si pour tout dyadique x, la suite réelle $(f_k(x))_{k\geq 0}$ converge vers $f(x)$.

Lemme 6.1. *$\mathcal{D}$ est une application linéaire et faiblement continue de $\mathcal{S}$ dans F.*

La propriété de continuité faible ci-dessus exprime que $\mathcal{D}$ transforme toute suite faiblement convergente dans $\mathcal{S}$ en une suite faiblement convergente dans $\mathcal{F}$.

Démonstration du lemme 6.1. Soient a_1, a_2 deux suites réelles et α, β deux réels quelconques. Posons $a_3 = \alpha a_1 + \beta a_2$ et notons f_1, f_2 et f_3 les "fonctions" interpolées par $(\mathcal{D})$, respectivement à partir de a_1, a_2 et a_3. Nous devons prouver qu'on a pour tout dyadique x,

$$f_3(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x). \tag{50}$$

Démontrons (50) par récurrence sur l'ordre r des dyadiques.

- Si x est un entier, (50) est réalisé par hypothèse.

- Supposons maintenant (50) vérifié pour tout dyadique x d'ordre r et considérons un dyadique x quelconque d'ordre $r+1$. Pour fixer les idées nous posons $x = 2^{-(r+1)}k$.

- Si k est pair, alors x est élément de E_r et (50) est vérifié par hypothèse.

- Si k est impair ($k = 2n+1$), alors d'après (49) on a $f_i(x) = Ra_i^r(n)$ pour $i = 1, 2, 3$ avec $a_i^r = (f(2^{-r}p))_{p\in\mathbb{Z}}$, R étant l'opérateur de convolution défini sur $\mathcal{S}$ par

$$Rz(\cdot) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c(\cdot - k)z(k), \;\; z \in \mathcal{S}.$$

On en déduit que $\mathcal{D}$ est linéaire. Soit maintenant une suite $(a_k)_{k\geq 0}$ d'élèments de $\mathcal{S}$ convergeant faiblement dans $\mathcal{S}$ vers a. Notons $f_k (k \in \mathbb{N})$ et f les fonctions interpolées par $\mathcal{D}$ partant respectivement des suites réelles a_k et a. Nous devons vérifier que pour tout dyadique x, $(f_k(x))_{k\geq 0}$ converge vers $f(x)$. Par définition du procédé $(\mathcal{D})$, ceci est vérifié quand x est un entier. Par ailleurs, l'opérateur R défini ci-dessus est faiblement continu sur $\mathcal{S}$ car la famille $\{c(n),\; n \in \mathbb{Z}\}$ est finie. On conclut alors comme précédemment en utilisant une démonstration par récurrence sur l'ordre r des dyadiques. □

Définition : fonction principale

La "fonction" ϕ définie sur E comme l'interpolée par $(\mathcal{D})$ partant de la suite $\delta_0 = (\delta_{0,n})_{n\in\mathbb{Z}}$ est appelée *fonction principale* relative à $(\mathcal{D})$. Supposons pour fixer les idées que $c(k) = 0$ pour tout entier k non contenu dans l'intervalle $[p, q]$ où $p < q$ sont deux entiers arbitrairement fixé.

Proposition 6.2. *La "fonction" ϕ est à support borné contenu dans $[2p+1, 2q+1]$ ($\phi(x) = 0$ pour tout dyadique x non contenu dans $[2p+1, 2q+1]$). En outre, toute "fonction" interpolée par $(\mathcal{D})$ s'écrit*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\phi(x-k), \;\; x \in E.$$

Pour tout dyadique x fixé, la série ci-dessus est une somme finie. En particulier, si a est une suite à support fini, alors la "fonction" interpolée correspondante est à support borné sur E.

Démonstration de la proposition : (49) entraîne que $\phi(n+\frac{1}{2}) = c(n)$, d'où $\phi(\frac{k}{2}) = 0$ pour tout entier $k \notin [2p+1, 2q+1]$. Autrement dit on a $\phi(x) = 0$ quand x est un dyadique d'ordre 1 non contenu dans $[p+\frac{1}{2}, q+\frac{1}{2}]$. De la même façon, nous obtenons par récurrence sur l'entier $r \in I\!N^*$ que $\phi(2^{-r}k)$ est nul pour tout entier $k \notin [a_r, b_r]$ où les réels a_r et b_r sont définis par $a_r = 2a_{r-1} + 2p + 1$ et $b_r = 2b_{r-1} + 2q + 1$. On obtient finalement que $a_r = (2^r - 1)(2p+1)$ et $b_r = (2^r - 1)(2q+1)$ et on en déduit que $\phi(x)$ est nul pour tout dyadique x non contenu dans l'intervalle $[2p+1, 2q+1]$.

Définissons à présent les opérateurs de translations δ et T donnés respectivement sur $\mathcal{S}$ et $\mathcal{F}$ par

$$\begin{aligned} \delta a(k) &= a(k-1), \quad k \in \mathbb{Z} \\ Tf(x) &= f(x-1), \quad x \in E. \end{aligned}$$

Lemme 6.3. *On a*

$$\mathcal{D} \circ \delta = T \circ \mathcal{D}.$$

Admettons dans un premier temps ce lemme et considérons une suite réelle a quelconque. Pour tout entier positif N, nous posons

$$a_N = \sum_{|n| \leq N} a(n)\delta_n$$

où $(\delta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est la base canonique de $\mathcal{S}$. Il est clair que la suite $(a_N)_{N\geq 0}$ converge faiblement vers a. D'après le lemme 6.1., la suite $(\mathcal{D}\ a_N)_{N\geq 0}$ converge faiblement dans $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{D}\ a$ et d'après le lemme 6.3. on a

$$\mathcal{D}\ a_N = \sum_{|k| \leq N} a(k) T^k\ \mathcal{D}(\delta_0),$$

ce qui prouve le second point de la proposition.

Preuve du lemme 6.3. Notons pour simplifier $f = \mathcal{D}\ a$ et $f_1 = \mathcal{D}(\delta\ a)$ où a est un élément de $\mathcal{S}$ arbitrairement fixé. Nous devons prouver qu'on a pour tout dyadique x

$$f_1(x) = f(x-1). \tag{51}$$

Procédons de nouveau par récurrence :

- (51) est évidemment vérifié pour $x \in \mathbb{Z}$.

- Supposons à présent (51) vérifié pour tout dyadique d'ordre r et considérons un élément quelconque $x = 2^{-(r+1)}k$ de E_{r+1}. Il nous faut prouver (51) uniquement dans le cas où l'entier k est impair (*ie* $k = 2n+1$). Or utilisant successivement (49) appliqué à

f_1, puis l'hypothèse de récurrence et enfin le changement de variable $k \to k - 2^r$, nous obtenons

$$f_1(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(n - 2^r - k) f(2^{-r}k)$$

et l'on conclut aisément en utilisant (49) cette fois appliquée à f. □

Définition : interpolation continue

Nous dirons que le procédé d'interpolation dyadique $(\mathcal{D})$ est continu si la fonction principale ϕ relative à $(\mathcal{D})$ admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire s'il existe une fonction g continue sur $\mathbb{R}$ et coïncidant sur E avec la "fonction" ϕ.

Par abus de langage, nous noterons encore ϕ ce prolongement et nous dirons que ϕ est la fonction principale relative à $(\mathcal{D})$. D'après ce qui précède la fonction ϕ est à support compact contenu dans $[2p+1, 2q+1]$.

Considérons maintenant une "fonction" f quelconque interpolée par $(\mathcal{D})$. D'après la proposition 6.2, il existe pour tout réel $A > 0$, un entier p ne dépendant que du réel A tel que l'on ait pour tout dyadique x contenu dans $[-A, A]$

$$f(x) = \sum_{|k| \leq p} f(k)\phi(x - k).$$

Ainsi, f admet un prolongement $\tilde{f}$ continu sur $[-A, A]$ et vérifiant pour tout réel x contenu dans $[-A, A]$

$$\tilde{f}(x) = \sum_{|k| \leq p} f(k)\phi(x - k).$$

Le réel $A > 0$ étant quelconque, nous en déduisons finalement la propriété suivante.

Proposition 6.4. *Si $(\mathcal{D})$ est une interpolation dyadique continue, alors toute "fonction" f interpolée par $(\mathcal{D})$ admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$ (que nous noterons encore f) vérifiant pour tout réel x*

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k)\phi(x - k). \tag{52}$$

Evidemment, pour les mêmes raisons, si la fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$, alors toute "fonction" f interpolée admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^p$, les dérivées successives jusqu'à l'ordre p de f s'obtenant par dérivation terme à terme dans (52).

Remarque. Le procédé d'interpolation dyadique défini dans ce paragraphe est un procédé récurrent dans le sens où le passage des dyadiques d'ordre r aux dyadiques d'ordre $r+1$ (via (49) est indépendant de l'entier $r \geq 0$. Cependant il est possible aussi de définir $(\mathcal{D})$ à partir d'une famille $\{c(r,k), k \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}\}$ de scalaires pour laquelle il existe deux entiers p et q tels que pour tout entier $r \geq 0$ et tout entier k non contenu dans $[p, q]$, on ait $c(r,k) = 0$. La formule (49) est alors remplacée par

$$f(2^{-r}n + 2^{-(r+1)}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(r, n - k) f(2^{-r}k).$$

Il est clair que tous les résultats de ce paragraphe sont encore vérifiés dans ce cas.

6.1.2. Lien avec l'analyse multi-échelle

Considérons une analyse multi-échelle scalaire $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle qu'il existe une fonction d'échelle ϕ continue, à support compact et vérifiant pour tout entier n

$$\phi(n) = \delta_{0,n}. \tag{53}$$

Une telle fonction est appelée ***ondelette interpolante***. Il est clair que toute fonction dans V_0 s'écrit $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\phi(x-k)$. Rappelons que $\hat{\phi}$ vérifie (2) et que la fonction 2π-périodique H intervenant dans (2) est un polynôme trigonométrique. Pour fixer les idées nous posons

$$H(\lambda) = \frac{1}{2}\sum_{k=p}^{q} h(k)e^{i\lambda k}.$$

Définissons à présent la famille $\{c(n),\ n\in\mathbb{Z}\}$ en posant $c(n) = h(2n+1)$. La suite $\{c(n),\ n\in\mathbb{Z}\}$ est à support fini et les conditions $H(0)=1$ et $H(\pi)=0$ (cf. paragraphe 4) entraîne que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c(k) = 1$.

Proposition 6.5. *Le procédé d'interpolation $(\mathcal{D})$ associé à $\{c(n),\ n\in\mathbb{Z}\}$ est continu et la fonction principale correspondante n'est autre que la fonciton d'échelle ϕ.*

Démonstration D'après la propriété d'emboîtement des espaces V_n, les fonctions $x \longrightarrow \phi(2^{-r}x)$ $(r\in\mathbb{N})$ sont contenues dans l'espace V_0 et de ce fait se décomposent de la façon suivante dans la base $\{T^k\phi,\ x\in\mathbb{Z}\}$

$$\phi(2^{-r}x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(2^{-r}k)\phi(x-k) \quad \text{(grâce à (53))},$$

d'où pour $x = n+\frac{1}{2}$ quand n est entier,

$$\phi(2^{-r}n + 2^{-(r+1)}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi\left(\frac{2(n-k)+1}{2}\right)\phi(2^{-r}k).$$

Or, d'après (1) et (53), nous obtenons pour tout entier p

$$\phi(\frac{2p+1}{2}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(n)\phi(2p+1-n) = c(p).$$

Ainsi, la fonction d'échelle ϕ apparaît comme une fonction interpolée par le procédé $(\mathcal{D})$ associé à la famille $\{c(n),\ n\in\mathbb{Z}\}$. Plus précisément ϕ est la fonction principale relative à $(\mathcal{D})$, ce qui prouve la proposition car ϕ est continue par hypothèse. □

Il est clair que tout élément de V_0 est une fonction interpolée par $(\mathcal{D})$.

Réciproquement considérons un procédé d'interpolation dyadique $(\mathcal{D})$ continu, associé à une suite $\{c(n),\ n\in\mathbb{Z}\}$ à support fini et vérifiant $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n) = 1$.

Proposition 6.6. *La fonction principale ϕ relative à ($\mathcal{D}$) vérifie (1) avec*

$$\begin{cases} h(2k) & = \delta_{0,k} \\ h(2k+1) & = c(k) \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

En outre si le polynôme trigonométrique $H(\lambda) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)e^{i\lambda k}$ vérifie la condition (42), alors $\{T^k\phi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ est un système de Riesz et la famille $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui en résulte forme une analyse multi-échelle.

Rappelons que la famille $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est définie de la façon suivante : V_0 est l'espace engendré dans $L^2(\mathbb{R})$ par le système $\{T^k\phi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et $V_n = D^n V_0,\ n \in \mathbb{Z}$. Notons enfin que H vérifie la condition (32) car $H(\lambda) + H(\lambda + \pi) = h(0) = 1$.

Démonstration de la proposition 6.6 Nous devons vérifier l'identité

$$\phi(\frac{x}{2}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h(n)\phi(x-n),\ x \in \mathbb{R}.$$

Par continuité, il suffit de prouver que $f : x \to \phi(\frac{x}{2})$ et $g : x \to \sum_{n\in\mathbb{Z}} h(n)\phi(x-n)$ coïncident sur E. Or d'après le lemme 6.3., $T^n\phi$ $(n \in \mathbb{Z})$ est la fonction interpolée par ($\mathcal{D}$) partant de la suite δ_n. Par linéarité de $\mathcal{D}$, la fonction g est la fonction interpolée par ($\mathcal{D}$) partant de la suite $a = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h(n)\delta_n$. De même, pour tout entier n et tout entier $r \geq 0$, nous obtenons d'après (49)

$$\begin{aligned} f(2^{-r}n + 2^{-(r+1)}) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c(n-k)\phi(2^{-(r+1)}k) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c(n-k)f(2^{-r}k). \end{aligned}$$

Ainsi f est aussi une fonction interpolée par $\mathcal{D}$. Nous en déduisons que f et g coïncideront sur E si elles coïncident sur $\mathbb{Z}$. Or,

$$\begin{aligned} g(k) &= h(k) = \begin{cases} \delta_{0,p} & \text{si } k = 2p \\ c(p) & \text{si } k = 2p+1 \end{cases} \\ f(k) &= \phi(p) = \begin{cases} \delta_{0,p} & \text{si } k = 2p \\ f(2p+1) = \phi(p+\frac{1}{2}) = c(p) & \text{si } k = 2p+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Le second point de la proposition découle directement du théorème 5.4 appliqué avec $d = 1$. □

6.2. Interpolation dyadique vectorielle

Nous désignons par $\vec{e_0}, \ldots, \vec{e_d}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{d+1}$. Toute famille $\{\vec{F}(x),\ x \in E\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^{d+1}$ est appelée "fonction" vectorielle définie sur E.

6.2.1. Définition : Procédé d'interpolation dyadique vectorielle

Soit $\{C(r,k),\ r \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}\}$ une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{M}(d+1, \mathbb{R})$. Supposons qu'il existe deux entiers $p < q$ tels que les matrices $C(r,k)$ soient nulles pour tout entier $r > 0$ et tout entier k non contenu dans $[p, q]$. A toute suite $\{\vec{A}(n),\ n \in \mathbb{Z}\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^{d+1}$, nous associons la "fonction" vectorielle $\vec{F}$ définie sur E par le procédé suivant :

- $\vec{F}(n) = \vec{A}(n),\ n \in \mathbb{Z}$
- Pour $r = 0, 1, 2, \ldots$ et tout entier n,

$$\vec{F}(2^{-r}n + 2^{-(r+1)}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C(r, n-k)\ \vec{F}(2^{-r}k).$$

Nous noterons encore $(\mathcal{D})$ ce procédé. Les propriétés du paragraphe 6.1 s'étendent de façon naturelle et sans difficultés au cadre vectoriel. En particulier nous pouvons définir pour $i = 0, \ldots, d$ les fonctions principales vectorielles $\vec{F_i}$ comme les fonctions interpolées par $(\mathcal{D})$ partant respectivement des suites $\vec{A_i} = \delta_0 \vec{e_i}$. Comme dans le cas scalaire, les "fonctions" $\vec{F_i}$ sont à support borné contenu dans $[2p+1, 2q+1]$ et toute fonction vectorielle $\vec{F}$ interpolée par $(\mathcal{D})$ s'écrit

$$\vec{F}(x) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_i(k)\ T^k \vec{F_i}(x),\ x \in E \tag{54}$$

où l'on a posé

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix}.$$

Nous allons étudier le procédé d'interpolation dyadique vectorielle uniquement dans un cas particulier qui généralise l'interpolation dyadique continue du cas scalaire. Pour cela nous définissons pour toute fonction réelle f de classe C^d sur $\mathbb{R}$, la fonction vectorielle $\vec{\Delta} f$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{d+1}$ donnée par

$$\vec{\Delta} f = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ \vdots \\ f^{(d)} \end{pmatrix}.$$

Définition : interpolation dyadique d'ordre d

Considérons un procédé $(\mathcal{D})$ d'interpolation dyadique vectorielle et notons $\vec{F_i}$ pour $i = 0, \ldots, d$, les fonctions principales vectorielles correspondantes.

Nous dirons que $(\mathcal{D})$ définit une *interpolation dyadique d'ordre* d s'il existe $d+1$ fonctions réelles $\phi_i (i = 0, \ldots, d)$ de classe C^d sur $\mathbb{R}$ telles que l'on ait, pour chaque entier $i = 0, \ldots, d$ et tout dyadique x, $\vec{F_i}(x) = \vec{\Delta} \phi_i(x)$. Par abus de langale, les fonctions ϕ_i seront appelées fonctions principales relatives à $(\mathcal{D})$. Celles-ci vérifient par définition

$$(\phi^i)^{(\ell)}(n) = \delta_{0,n} \cdot \delta_{i,\ell},\ n \in \mathbb{Z}, \ell = 0, \ldots, d$$

et sont à support compact contenu dans $[2p+1, 2q+1]$. Par ailleurs pour toute fonction vectorielle

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix}$$

interpolée par $(\mathcal{D})$, nous obtenons d'après (54), pour $\ell = 0, \dots, d$ et tout dyadique x

$$f_\ell(x) = \sum_{i=0}^{d} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_i(k) \phi_i^{(\ell)}(x-k). \tag{55}$$

Pour tout dyadique arbitrairement fixé, la série ci-dessus est une somme finie, de sorte que (55) s'étend à $\mathbb{R}$ tout entier. Plus précisément, chaque "fonction" f_ℓ pour $\ell = 0, \dots, d$ admet un prolongement sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{d-\ell}$, les dérivées successives s'obtenant par dérivation terme à terme dans (55). Les prolongements de chaque fonction f_ℓ est encore noté f_ℓ. En particulier, ce qui précède appliquée à la fonction f_0 assure que cette dernière est de classe $\mathcal{C}^d$ avec pour $\ell = 0, \dots, d$, $f_0^{(\ell)} = f_\ell$. Nous pouvons résumer ce qui précède par la proposition suivante.

Proposition 6.7. *Si $(\mathcal{D})$ est un procédé d'interpolation dyadique d'ordre d, alors pour toute "fonction" vectorielle $\vec{F}$ interpolée par $(\mathcal{D})$, il existe une fonction réelle f de classe $\mathcal{C}^d$ telle que l'on ait pour tout dyadique x*

$$\vec{\Delta} f(x) = \vec{F}(x).$$

En outre la fonction f admet la décomposition suivante sur $\mathbb{R}$

$$f = \sum_{i=0}^{d} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f^{(i)}(k) T^k \phi_i,$$

les dérivées successives jusqu'à l'ordre d s'obtenant par dérivation terme à terme.

Là encore, par abus de langage, f sera appelée fonction interpolée par $(\mathcal{D})$.

6.2.2. Lien entre interpolation dyadique d'ordre d et l'équation (5)

Considérons tout d'abord un polynôme trigonométrique à coefficients dans $\mathcal{M}(d+1, \mathbb{R})$ et supposons qu'il existe $d+1$ fonctions $\phi_0, \dots, \phi_d$ de classe $\mathcal{C}^d$, à support compact dans $\mathbb{R}$ solutions de l'équation (4) associée à H et vérifiant

$$\phi_i^{(\ell)}(n) = \delta_{0,n}\ \delta_{i,\ell},\ \forall n \in \mathbb{Z},\quad \forall i, \ell = 0, \dots, d. \tag{56}$$

Si on note V_0 l'espace engendré par les translatés entières des fonctions $\phi_1, \dots, \phi_d$, alors toute fonction f dans V_0 vérifie (d'après (56))

$$f^{(\ell)}(x) = \sum_{j=0}^{d} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f^{(j)}(k)\phi_j^{(\ell)}(x-k), \quad x \in \mathbb{R}, \ell = 0, \dots, d.$$

Ces identités, appliquées aux fonctions $x \to f(2^{-r}x)$ (où l'entier $r \geq 0$ est arbitrairement fixé) et aux réels $x = n + \frac{1}{2}$ ($n \in \mathbb{Z}$), entraînent pour $\ell = 0, \dots, d$

$$2^{-\ell r} f^{(\ell)}(2^{-r}n + 2^{-(r+1)}) = \sum_{j=0}^{d} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-jr} \phi_j^{(\ell)}(\frac{2(n-k)+1}{2}) f^{(j)}(2^{-r}k).$$

Posons $A = \mathrm{diag}(1, 2^{-1}, \dots, 2^{-d})$ et notons $W(x)$ l'élément de $\mathcal{M}(d+1, \mathbb{R})$ dont la $j^{\text{ième}}$ colonne pour $j = 0, \dots, d$ est donnée par $\vec{\Delta\phi_j}(x)$. Ceci étant posé, les $d+1$ identités ci-dessus s'écrivent matriciellement sous la forme

$$A^r \vec{\Delta f}(2^{-r}n + 2^{-(r+1)}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} W(\frac{2(n-k)+1}{2}) A^r \vec{\Delta f}(2^{-r}k).$$

Par ailleurs, nous obtenons grâce à (4)

$$W(\frac{x}{2})^* A = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)\, W(x-k)^*$$

d'où, d'après (56)

$$W(\frac{2\ell+1}{2})^* A = h(2\ell+1).$$

Finalement $\vec{\Delta f}$ apparaît comme une fonction interpolée par le procédé d'interpolation dyadique $(\mathcal{D})$ défini par la relation récurrente suivante

$$\vec{F}(2^{-r}n + 2^{-(r+1)}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} A^{-(r+1)} h(2(n-k)+1)^* A^r \vec{F}(2^{-r}k).$$

En particulier les fonctions ϕ_i pour $i = 0, \dots, d$ apparaissent comme les fonctions principales relatives à $(\mathcal{D})$. Nous disposons ainsi du résultat suivant.

Proposition 6.8. *Si H est un polynôme trigonométrique à coefficients dans $\mathcal{M}(d+1, \mathbb{R})$ tel qu'il existe $d+1$ fonctions $\phi_0, \dots, \phi_d$ solutions de (4), à support compact, de classe C^d sur $\mathbb{R}$ et vérifiant (56), alors le procédé d'interpolation dyadique $(\mathcal{D})$ associé à la famille $\{C(r,k),\ r \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}\}$ donnée par*

$$C(r,k) = A^{-(r+1)} h(2k+1)^* A^{-r} \text{ où } A = \mathrm{diag}(1, 2^{-1}, \dots, 2^{-d}),$$

définit une interpolation dyadique d'ordre d. Les fonctions principales correspondantes sont exactement les fonctions $\phi_i (i = 0, \dots, d)$.

Remarque : Si pour chaque entier $\ell, j = 0, \dots, d$, les fonctions $\lambda \to \lambda^\ell \hat{\phi}_j(\lambda)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, alors (56) est équivalent à (avec les notations habituelles)

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\lambda + 2k\pi)^\ell \hat{V}(\lambda + 2k\pi) = (i)^\ell \vec{e_\ell}, \quad \ell = 0, \dots, d.$$

Utilisant (5) et des techniques désormais classiques, nous obtenons l'identité

$$H(\lambda) + H(\lambda + \pi) = A. \tag{57}$$

Réciproquement, considérons à présent une famille finie $\{C(n),\ n \in \mathbb{Z}\}$ d'éléments de $\mathcal{M}(d+1, \mathbb{R})$ et supposons que le procédé $(\mathcal{D})$ associé à la famille

$$\{C(r,k) = A^{-r}C(k)A^r,\ r \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}\}$$

définisse une interpolation dyadique d'ordre d. Notons $\phi_0, \ldots, \phi_d$ les fonctions principales correspondantes et posons

$$V = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \vdots \\ \phi_d, \end{pmatrix}$$

puis $h(2k) = \delta_{0,k}\ A$ et $h(2k+1) = C(k)^*\ A\ \ (k \in \mathbb{Z})$, où $A = \mathrm{diag}(1, 2^{-1}, \ldots, 2^{-d})$. Notons que le polynôme trigonométrique H défini par $H(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i\lambda k} h(k)$ vérifie (57). Enfin nous désignons par θ la série matricielle associée aux fonctions $\phi_0, \ldots, \phi_d$.

Proposition 6.9. *La fonction vectorielle V vérifie l'équation (4) associée à la famille $\{h(k),\ h \in \mathbb{Z}\}$ définie ci-dessus et si H vérifie (42), alors $\{T^k\phi_i, i = 0, \ldots, d,\ k \in \mathbb{Z}\}$ forme un système de Riesz si et seulement si la matrice $\theta(0)$ est non dégénérée.*

Démonstration de la propostion 6.9 Notons $(a_k(i,j))_{i,j=0,\ldots,d}$ les coefficients de la matrice $h(k)$ $(k \in \mathbb{Z})$. Nous allons montrer qu'on a pour chaque entier $i = 0, \ldots, d$

$$A\Delta\vec{\phi}_i(\frac{x}{2}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j=0}^{d} a_k(i,j)\ \Delta\vec{\phi}_j(x-k). \tag{58}$$

Ceci prouvera (4) (considérer pour cela chaque première ligne des $d+1$ égalités vectorielles ci-dessus). Soient $i \in \{0, \ldots, d\}$ arbitrairement fixé et $F_i(x)$ et $G_i(x)(x \in \mathbb{R})$ respectivement le terme de gauche et le terme de droite dans (58). Par un argument de continuité, il suffit de prouver que les fonctions F_i et G_i coïncident sur E. Nous procédons alors comme dans le cas scalaire en montrant successivement que les fonctions F_i et G_i sont deux "fonctions" interpolées par $(\mathcal{D})$ puis qu'elles coïncident sur $\mathbb{Z}$. La preuve de ces deux propriétés est identique au cas scalaire (cf. proposition 6.6). Notons que H vérifie (57), ce qui assure la condition (32). Le dernier point résulte alors du théorème 5.4. □

6.2.3. Exemples

Exemples 1

La famille d'exemples que nous étudions ici est tirée de [13].

Soit $\mu \in \mathbb{R}$. Posons $\mu' = \frac{1-\mu}{2}$,

$$C_\mu(-1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ \mu & \mu' \end{pmatrix},$$

$$C_\mu(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ -\mu & \mu' \end{pmatrix},$$

et $C_\mu(k) = 0$ pour tout entier $k \neq -1, 0$. Nous désignons par $(\mathcal{D}_\mu)$ le procédé d'interpolation dyadique associée à la famille $\{A^{-r}C_\mu(k)A^r,\ r \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}\}$.
J.-L. Merrien montre que $(\mathcal{D}_\mu)$ définit un procédé d'interpolation dyadique d'ordre 1 et plus précisément que les deux fonctions principales associées à $(\mathcal{D}_\mu)$ sont de classe $\mathcal{C}^\alpha$ pour tout réel $\alpha < 2$ si et seulement si le réel μ vérifie $|2-\mu| < 1$. Notons ϕ_0 et ϕ_1 (sous-entendu $\phi_{0,\mu}$ et $\phi_{1,\mu}$) les deux fonctions principales relatives à $(\mathcal{D}_\mu)$. Reprenant les notations du paragraphe précédent, nous savons d'après la proposition 6.9 que la fonction vectorielle V vérifie l'équation (4) associée à la famille $\{h(n), n \in \mathbb{Z}\}$ définie par $h(n) = 0$ si $n \neq -1, 0, 1$ puis $h(0) = A$, $h(-1) = C_\mu(-1)^*A$, $h(1) = C_\mu(0)^*A$ où $A = \mathrm{diag}(1, \frac{1}{2})$.
Grâce à la transformée de Fourier, on peut aussi écrire que $\hat{V}$ vérifie (5) avec

$$H_\mu(\lambda) = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\lambda}{2} & -\frac{i\mu}{2}\sin\lambda \\ \frac{1}{8}\sin\lambda & \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \mu'\cos\lambda) \end{pmatrix}.$$

Si $\mu = \frac{3}{2}$, on retrouve l'exemple 6 du paragraphe 5 (interpolation d'Hermite pour $r = 2$). De même le cas $\mu = 2$ correspond aux splines quadratiques (cf. exemple 2 paragraphe 3 cas $r = 2$). Nous avons vu dans ces deux cas que la famille composée des translatés entières des deux fonctions principales correspondantes forme un système de Riesz. Nous généralisons ce résultat à la famille $(\mathcal{D}_\mu)$ définie ci-dessus, à savoir :

Si $|2-\mu| < 1$, alors la famille constituée des translatés entières des deux fonctions principales relatives à $(\mathcal{D}_\mu)$ forme un système de Riesz.

Démontrons cette propriété. Un calcul immédiat prouve que det $H_\mu(\lambda) = \frac{2-\mu}{4}\cos^4\frac{\lambda}{2}$. La preuve pour $\mu = 2$ étant explicitée dans le paragraphe 3, nous supposons désormais $\mu \neq 2$. Il est clair que le polynôme trigonométrique H_μ satisfait aux hypothèses (32) et (42). Il reste par conséquent à vérifier (cf. théorème 5.4) que det $\theta(0)$ est non nul, où nous avons désigné par θ la série matricielle associée aux fonctions principales ϕ_0 et ϕ_1. Celles-ci étant à support compact et de classe $\mathcal{C}^\alpha(\alpha < 2)$, on obtient que $|\hat{\phi_0}(\lambda)| + |\hat{\phi_1}(\lambda)| \leq \frac{c}{1+|\lambda|^\alpha}$, de sorte que les identités suivantes ont un sens (cf. remarque du paragraphe précédent)

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\phi_0}(\lambda + 2k\pi) = 1 \tag{59}$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\phi_1}(\lambda + 2k\pi) = 0. \tag{60}$$

Par ailleurs, notons que $H(\pi)^*\vec{e_1} = \vec{0}$, ce qui entraîne que $\hat{\phi_0}(2k\pi) = 0$ pour tout entier $k \neq 0$ (cf. démonstration du lemme 4.2). Ceci adjoint à (59) prouve que $\hat{\phi_0}(0) = 1$. Enfin notons que $H(0) = \mathrm{diag}(1, \frac{2-\mu}{2})$, de sorte que $\hat{V}(0) = \vec{e_1}$, d'où finalement

$$\theta(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{où } a = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\phi_1}(2k\pi)|^2.$$

Procédons par l'absurde et supposons qu'on a $\det\theta(0) = 0$, c'est-à-dire que le réel a est nul. Rappelons que θ est invariante sous l'action de l'opérateur P_{H_μ}. Ecrivant l'égalité $P_{H_\mu}\theta(0) = \theta(0)$, on obtient que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\phi}_1(\pi+2k\pi)|^2 = 0$, c'est-à-dire que $\hat{\phi}_1(\pi+2k\pi) = 0$ pour tout entier k, ce qui entraîne que $\det\theta(\pi)$ est nul. On en déduit (cf. lemme 5.5) que la fonction $\lambda \longrightarrow \det\theta(\lambda)$ est nulle, soit

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\phi}_0(\lambda+2k\pi)|^2\right)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\phi}_1(\lambda+2k\pi)|^2\right) = \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\phi}_1(\lambda+2k\pi)\overline{\hat{\phi}_1(\lambda+2k\pi)}|^2\right|.$$

Considérons pour tout réel λ les éléments $A_0(\lambda) = (\hat{\phi}_0(\lambda+2k\pi))_{k\in\mathbb{Z}}$ et $A_1(\lambda) = (\hat{\phi}_1(\lambda+2k\pi))_{k\in\mathbb{Z}}$ de $\ell^2(\mathbb{Z})$. L'identité ci-dessus exprime qu'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\langle A_0(\lambda), A_1(\lambda)\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})\times\ell^2(\mathbb{Z})} \leq \|A_0(\lambda)\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})}\ \ \|A_1(\lambda)\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})},$$

c'est-à-dire que les suites $A_0(\lambda)$ et $A_1(\lambda)$ sont linéairement dépendantes. En particulier si la suite $A_1(\lambda)$ est non nulle, alors il existe un unique scalaire $\alpha(\lambda)$ tel que $A_0(\lambda) = \alpha(\lambda)A_1(\lambda)$. Considérons maintenant un réel λ tel que $\hat{\phi}_1(\lambda) \neq 0$, ce qui est possible car la fonction ϕ_1 n'est pas nulle. Les suites $A_1(\lambda+2k\pi)$ sont non nulles pour tout entier k et on déduit de ce qui précède que $\hat{\phi}_0(\lambda) = \alpha(\lambda+2k\pi)\hat{\phi}_1(\lambda)$, d'où $\alpha(\lambda) = \alpha(\lambda+2k\pi)$ pour tout entier k. Ceci adjoint aux identités (59) et (60) entraîne que

$$1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\phi}_0(\lambda+2k\pi) = \alpha(\lambda)\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\phi}_1(\lambda+2k\pi) = 0,$$

ce qui est absurde. La propriété annoncée est ainsi démontrée.

Exemple 2 : Interpolation d'Hermite pour $r = 3$

Nous reprenons l'exemple 7 du paragraphe 5. Les fonctions ϕ_0, ϕ_1 et ϕ_2 de cet exemple vérifient par construction (cf. paragraphe 1) la condition (56). On déduit de la proposition 6.8 que le procédé $(\mathcal{D})$ associé à la famille $\{A^{-r}c(k)A^r,\ k \in \mathbb{Z}\}$ où $A = \mathrm{diag}(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $C(k) = 0$ si $k \neq -1, 0$ et

$$C(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{32} & \frac{1}{64} \\ -\frac{15}{8} & -\frac{7}{16} & -\frac{1}{32} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$C(-1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{32} & \frac{1}{64} \\ \frac{15}{8} & -\frac{7}{16} & \frac{1}{32} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4}, \end{pmatrix}$$

définit une interpolation dyadique d'ordre 2.

Remarque : On peut de la même façon définir les procédés d'interpolation triadyque (ou plus généralement p-adyque). Dans le cas de l'interpolation triadyque, le procédé est défini par deux relations de récurrence

$$\begin{cases} F(3^{-r}n + 3^{(-r+1)}) & = \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_1(r, n-k)F(3^{-r}k) \\ F(3^{-r}n + 2\cdot 3^{-(r+1)}) & = \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_2(r, n-k)F(3^{-r}k). \end{cases}$$

Si on étend de manière naturelle les définitions du paragraphe précédent, on montre par exemple que les fonctions ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 corespondant aux splines cubiques (exemple 2 paragraphe 3 cas $r = 3$) déterminent les fonctions principales d'une interpolation triadyque d'ordre 2. Les coefficients $C_i(r,k)$ (éléments de $\mathcal{M}(3,\mathbb{R})$) se calculent à l'aide de la matrice $A = \mathrm{diag}(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9})$ et des coefficients $h(k)$ définis dans la démonstration de la proposition 3.7.

7. Etude des propriétés (P2) et (P3) dans le cas où H est de classe C^α

Les théorèmes 5.1 et 5.4 fournissent, quand H est un polynôme trigonométrique scalaire ou matriciel, des critères relatifs aux propriétés (P2) et (P3) énoncées dans l'introduction. Nous nous proposons dans ce paragraphe de généraliser ces résultats dans le cas général où H est une fonction scalaire ou matricielle de classe C^α, où $0 < \alpha \leq 1$ (cf. paragraphe 2). Bien que le critère pour (P2) soit de même nature dans les cadres scalaire et vectoriel, nous avons choisi pour simplifier d'énoncer et de démontrer dans un premier temps les résultats du cas scalaire. Nous verrons que la plupart des techniques mises en place s'étendent de manière naturelle au cas vectoriel.

7.1. Cas scalaire

Dans ce paragraphe nous désignons par H une fonction 2π-périodique à valeurs complexes. Si H est de classe $C^\alpha(0 < \alpha \leq 1)$ et vérifie $H(0) = 1$, alors la fonction $\hat{\phi}$ définie par $\hat{\phi}(\lambda) = \prod_{k=1}^{+\infty} H(\frac{\lambda}{2^k})$ est continue sur $\mathbb{R}$ (cf. paragraphe 2) et nous nous proposons de déterminer dans un premier temps une condition suffisante sur H pour que la fonction $\hat{\phi}$ soit de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ (propriété (P2)), puis une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ engendre par translations entières un système de Riesz (propriété (P3)). Commençons par exhiber quelques conditions nécessaires. Rappelons que l'opérateur P_H est défini par

$$P_H f(\lambda) = |H(\frac{\lambda}{2})|^2 f(\frac{\lambda}{2}) + |H(\frac{\lambda}{2} + \pi)|^2 f(\frac{\lambda}{2} + \pi).$$

- Si (P2) est vérifiée, alors la série scalaire θ associée à ϕ est défini, P_H-invariante et dans le cas où $\theta(\pi)$ est non nul, on a nécessairement $H(\pi) = 0$ (cf. paragraphe 4).

- Si l'on suppose à présent (P3) vérifiée, alors il existe une norme $\|\cdot\|$ sur l'espace $\mathbb{L}^\infty(0, 2\pi)$ pour laquelle on a $\sup_{\|f\|=1} \|P_H f\| = 1$. Il suffit en effet de reprendre les arguments de la remarque 3 du paragraphe 5.2. Cette dernière condition est difficile à vérifier dans la pratique. Rappelons que celle-ci entraîne la propriété (P2) dans le cas où H est un polynôme trigonométrique (cf. théorème 5.1) et qu'elle est équivalente à la condition (40) portant sur le spectre de la matrice P associée à P_H, ce dernier critère étant lui tout à fait accessible dans la pratique.

Le but de ce paragraphe est de présenter des critères pour (P2) et (P3) portant sur le spectre de l'opérateur P_H considéré sur $\mathbb{L}^\infty(0, 2\pi)$ ou un sous-espace de ce dernier. Notons que les propriétés telles que ≪ 1 est la plus grande valeur propre de l'opérateur P_H ≫ ou encore ≪ le rayon spectral de P_H est égal à 1 ≫ ne sont suffisantes ni pour (P3), ni même pour (P2). Pour le voir nous reprenons la famille des polynômes trigonométriques H_a de l'exemple 4 du paragraphe 5.3. Si $a = \frac{1}{2}$ alors la matrice $P_{\frac{1}{2}}$ admet 1 comme valeur propre double et on sait que la fonction $\hat{\phi}_{\frac{1}{2}}$ correspondante n'appartient pas à $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Montrons que l'opérateur $P_{H_{\frac{1}{2}}}$ considéré sur $\mathbb{L}^\infty(0, 2\pi)$ satisfait pourtant aux deux hypothèses ci-dessus. Rappelons à cet effet que (P3) est vérifiée quand $a < \frac{1}{2}$ et on en déduit (cf. condition nécessaire à (P3) ci-dessus) que le rayon spectral de l'opérateur P_{H_a} considéré sur $\mathbb{L}^\infty(0, 2\pi)$ est égal à 1 pour tout réel $a < \frac{1}{2}$. On conclut par un argument de continuité que le rayon spectral de $P_{H_{\frac{1}{2}}}$ sur $\mathbb{L}^\infty(0, 2\pi)$ est égal à 1, ce qui prouve les deux propriétés annoncées.

Nous désignons par **1** la fonction identiquement égale à 1 sur $\mathbb{R}$.

Théorème 7.1. *Si H est une fonction 2π-périodique, à valeurs complexes, de classe $C^\alpha (0 < \alpha \leq 1)$, vérifiant $H(0) = 1$ et $H(\pi) = 0$, et si l'opérateur P_H associé satisfait à l'hypothèse*

$$\sup_{n \geq 1} \|P_H^n \mathbf{1}\|_\infty < +\infty \tag{61}$$

alors la fonction $\hat{\phi}$ est de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

Remarques

1. P_H étant un opérateur positif, on a $\sup\{\|P_H f\|_\infty,\ f \in \mathbb{L}^\infty(0, 2\pi), \|f\|_\infty = 1\} = \|P_H \mathbf{1}\|_\infty$. La condition (61) entraîne que le rayon spectral de P_H est égale à 1. Plus précisément il résultera des propriétés établies dans la démonstration du théorème que les valeurs spectrales de module 1 sont en fait des valeurs propres pour P_H et que ces dernières sont en nombre fini et d'indice 1 (c'est-à-dire vérifient $\mathrm{Ker}(P_H - \alpha Id) = \mathrm{Ker}(P_H - \alpha Id)^2$).

2. La propriété (61) est satisfaite si H vérifie : $|H(\lambda)|^2 + |H(\lambda + \pi)|^2 \leq 1$. Ainsi sous cette dernière hypothèse, la fonction $\hat{\phi}$ solution de (2) appartient à $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.

Démonstration du théorème 7.1 La démonstration est basée sur le théorème de Ionescu-Tulcéa et Marinescu [9], [11], [15]. Notons B l'espace de Banach des fonctions 2π-périodiques et continues, muni de la norme uniforme usuelle $\|\cdot\|_\infty$ et L_α le sous-espace de B constitué des fonctions de classe C^α. Nous posons pour $f \in L_\alpha$

$$m_\alpha(f) = \sup\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}, x, y \in [0, 2\pi], x \neq y\},$$

et définissons sur L_α la norme $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty + m(\cdot)$. Nous noterons $\|\cdot\|_{\alpha,\infty}$ la norme $\|\cdot\|_\infty$ restreinte à l'espace L_α. Il est clair que l'opérateur P_H est borné sur $(B, \|\cdot\|_\infty)$ et le lemme suivant précise l'action de P_H sur L_α.

Lemme 7.2. *L'opérateur P_n est borné sur $(L_\alpha, \|\cdot\|)$ et il existe pour chaque entier $n \geq 1$ une constante $R_n > 0$ telle que l'on ait pour toute fonction f dans L_α*

$$\|P_H^n f\| \leq 2^{-n\alpha}\|P_H \mathbf{1}\|_\infty \|f\| + R_n \|f\|_\infty. \tag{62}$$

Admettons dans un premier temps ce lemme. Pour N suffisamment grand on a d'après (61) $2^{-N\alpha}\|P_H\mathbf{1}\|_\infty < 1$. Par ailleurs l'opérateur P_H étant positif, il vient que $|P_H^n|_{\alpha,\infty} = \sup\{\|P_H^n f\|_{\alpha,\infty}, f \in L, \|f\|_\infty = 1\} = \|P_H^n \mathbf{1}\|_\infty$, d'où $\sup_{n\geq 1} |P_H^n|_{\alpha,\infty} < +\infty$, et on montre (grâce en particulier au théorème d'Ascoli) que l'opérateur P_H satisfait aux hypothèses du théorème de Ionescu-Tulcéa et Marinescu. Ce dernier assure qu'il existe un nombre fini de valeurs spectrales $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ de P_H sur le cercle unité et que celles-ci sont plus précisément des valeurs propres de P_H admettant chacune un sous-espace propre associé de dimension finie. On dispose en outre de la décomposition suivante, vérifiée pour toute fonction f dans L_α et tout entier $n \geq 1$,

$$P_H^n f = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i^n f_i + Q^n f, \tag{63}$$

où $P_H f_i = \lambda_i f_i (i = 1, \ldots, \ell)$ et $\lim_{n\to+\infty} \|Q^n f\|_\infty = 0$.

L'espace $E = \oplus_{i=1}^{\ell} \mathrm{Ker}(P_H - \lambda_i Id)$, qui est de dimension finie et stable par P_H, va jouer le même rôle que l'espace E_d^N du paragraphe 5. Choisissons tout d'abord une sous-suite $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que les ℓ suites $(\lambda_i^{n_k})_{k\geq 1}$ convergent sur le cercle unité vers des complexes notés respectivement a_i, puis considérons une fonction h dans L_α, positive et vérifiant $h(0) = 1$. Appliquant (63) à la fonction h et passant à la limite quand $n_k \to +\infty$, on obtient que la fonction $g = \sum_{i=1}^{\ell} a_i f_i$ (qui appartient à E) est positive car P_H est un opérateur positif, puis vérifie $g(0) = 1$ car $P_H h(0) = h(0) = 1$. Nous pouvons par conséquent considérer le sous-ensemble Γ de E constitué des fonctions positives vérifiant $f(0) = 1$ et $\|f\|_1 \leq \|g\|_1$, où $\|\cdot\|_1$ est la norme définie sur E de la manière suivante. On choisit une base $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_p})$ de E formée de vecteurs propres de P_H (associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$) et pour tout vecteur $\vec{x} = \sum_{i=1}^{p} x_i \vec{e_i}$ dans E, on pose $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{p} |x_i|$. On vérifie immédiatement que Γ est un ensemble convexe, fermé, borné, non vide (car il contient g) et finalement un convexe compact, car E est de dimension finie. D'autre part il est clair que l'opérateur P_H conserve Γ. Le théorème de Schauder-Tychonoff (cf [8]) assure alors qu'il existe une fonction γ dans Γ invariante par P_H (en particulier l'une des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ est égale à 1). On conclut comme pour le théorème 5.1 en appliquant successivement le lemme 5.2 à la fonction γ (avec $d = 1$) puis le lemme de Fatou.

Démonstration du lemme 7.2. Démontrons directement la propriété (62). Cette dernière appliquée avec $n = 1$ prouve que P_H est borné sur $(L_\alpha, \|\cdot\|)$.

On montre aisément par récurrence que l'opérateur P_H^n $(n \geq 1)$ est défini par (cf. notation du paragraphe 4.4)

$$P_H^n f(\lambda) = \sum_{\delta_1,\ldots,\delta_n \in \{T_0,T_1\}} u(\delta_1\lambda)\cdots u(\delta_n\cdots\delta_1\lambda) f(\delta_n\cdots\delta_1\lambda),$$

où l'on a posé $u(\lambda) = |H(\lambda)|^2$. Ainsi on a pour toute fonction f dans L_α

$$\begin{aligned} P_H^n f(x) - P_H^n f(y) &= \sum_{\delta_1,\dots,\delta_n \in \{T_0,T_1\}} u(\delta_1 x)\cdots u(\delta_n\cdots\delta_1 x)[f(\delta_n\cdots\delta_1 x) - f(\delta_n\cdots\delta_1 y)] \\ &+ \sum_{\delta_1,\dots,\delta_n \in \{T_0,T_1\}} f(\delta_n\cdots\delta_1 y)[u(\delta_1 x)\cdots u(\delta_n\cdots\delta_1 x) \\ &- u(\delta_1 x)\cdots u(\delta_n\cdots\delta_1 y)]. \end{aligned}$$

Il est clair que les fonctions $\lambda \to u(\delta_1\lambda)\cdots u(\delta_n\cdots\delta_1\lambda)$ sont de classe $\mathcal{C}^\alpha$ et on obtient finalement que

$$|P_H^n f(x) - P_H^n f(y)| \leq 2^{-n\alpha}\|P_H^n \mathbf{1}\|_\infty m_\alpha(f)|x-y|^\alpha + c_n\|f\|_\infty|x-y|^\alpha,$$

la constante c_n ne dépendant que de l'entier n et de la fonction u. Le lemme est ainsi démontré. □

Pour obtenir (P3) il faut adjoindre à la propriété (61) la condition (32) (cf. paragraphe 4), puis les hypothèses obtenues dans [2] et [5]. Reprenant la terminologie présentée dans [5], nous appelons trajectoire de x, où $x \in [0, 2\pi]$, tout sous-ensemble de $[0, 2\pi]$ de la forme $\{\delta_n\cdots\delta_1 x,\ n \geq 1\}$ où $\{\delta_n,\ n \geq 1\}$ est une suite d'éléments de $\{T_0, T_1\}$ vérifiant $|H(\delta_n\cdots\delta_1 x)\cdots H(\delta_1 x)| > 0$ pour tout entier $n \geq 1$. Un compact F de $[0, 2\pi]$ est dit invariant si, pour tout $x \in F$ et tout $\delta \in \{T_0, T_1\}$ tels que $u(\delta x) > 0$, on a $\delta x \in F$.

Théorème 7.3. *Soit H une fonction 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^\alpha(0 < \alpha \leq 1)$ et vérifiant $H(0) = 1$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *La fonction ϕ solution de (1) est de carré intégrable sur $\mathbb{R}$, engendre par translations entières un système de Riesz et la série scalaire θ associée à ϕ est de classe $\mathcal{C}^\alpha$.*
2. *H vérifie $H(\pi) = 0$, (32), (61) et il n'existe pas de compact invariant disjoint de $\{0, 2\pi\}$.*

Dans le cas particulier où H admet un nombre fini p de zéros, l'hypothèse du 2) sur les compacts invariants peut être remplacée par la condition suivante

$$\forall\lambda \in Z_p,\ \lambda \neq 0,\ \exists\mu \in \mathcal{C}(\lambda) \text{ tel que } H(\mu+\pi) \neq 0. \tag{64}$$

Démonstration Les propriétés relatives aux compacts invariants sont prouvées dans [2], [5] et nous supposerons pour simplifier la démonstration ci-dessous que H admet un nombre fini p de zéros.

1. $\Rightarrow$ 2.. D'après la proposition 3.1, la fonction θ vérifie (12) et l'on peut donc définir sur l'espace B (cf. dem. du théorème précédent) les opérateurs $R_n f = \theta^{-1}P_H^n(\theta f)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. On vérifie immédiatement que les opérateurs R_n sont positifs, bornés sur $(B, \|\cdot\|_\infty)$ et vérifient $R_n\mathbf{1} = \mathbf{1}$. On en déduit que $\sup\{\|R_n f\|_\infty, f \in B, \|f\|_\infty = 1\} = \|R_n\mathbf{1}\|_\infty = 1$. Ainsi pour toute fonction f dans B et tout entier $n \geq 1$, on a $\|\theta^{-1}P_H^n f\|_\infty =$

$\|R_n(\theta^{-1}f)\|_\infty \leq \|\theta^{-1}f\|_\infty$, c'est-à-dire $|\theta^{-1}(\lambda)P_H^n f(\lambda)| \leq \|\theta^{-1}f\|_\infty$ *pp*, d'où grâce à (12), $\frac{1}{c}|P_H^n f(\lambda)| \leq c\|f\|_\infty$ *pp*, ce qui prouve la propriété (61). Les conditions $H(\pi) = 0$ et (32) sont satisfaites d'après le paragraphe 4.2. Enfin la propriété (64) (qui est l'analogue de la condition (42) du paragraphe 5) se démontre par l'absurde (cf. début de la démonstration de la proposition 5.7).

2. $\Rightarrow$ 1.. Notons tout d'abord que la condition (61) assure l'existence d'une fonction γ positive, de classe $\mathcal{C}^\alpha$, non nulle en 0 et P_H-invariante (cf. démonstration du théorème précédent). Nous allons démontrer que la fonction γ est strictement positive. Il suffit pour cela de reprendre les techniques établies dans la preuve du théorème 5.4. En effet si γ s'annule en un réel $\lambda \in]0, 2\pi[$, alors $H(\frac{\lambda}{2}) \neq 0$(respectivement $H(\frac{\lambda}{2} + \pi) \neq 0$) entraîne que $\gamma(\frac{\lambda}{2}) = 0$(respectivement que $\gamma(\frac{\lambda}{2} + \pi) = 0$). D'après (32) l'une de ces deux propriétés est vérifiée. Etudiant séparément les cas $\lambda \notin Z, \lambda \in Z - Z_p, \lambda \in Z_p$, on en déduit l'existence d'un réel x, zéro de γ, appartenant à 0_λ mais non contenu dans Z. L'itération de la propriété ci-dessus (à partir de x) assure alors que γ admet une infinité de zéros sur 0_x. Mais puisque par hypothèse les zéros de H sont en nombre fini, il existe nécessairement un élément y dans 0_x, zéro de γ et tel que l'ensemble 0_y ne contienne aucun zéro de H, de sorte qu'on a $\gamma(\frac{y}{2^k}) = 0$ pour tout entier $k \geq 0$, ce qui est impossible car γ est continue et non nulle en 0. La fonction γ étant strictement positive, on peut définir sur L_α l'opérateur $Rf = \gamma^{-1}P_H(\gamma f)$, soit encore, $Rf = a(\frac{\lambda}{2})f(\frac{\lambda}{2}) + a(\frac{\lambda}{2} + \pi)f(\frac{\lambda}{2} + \pi)$ où $a(\lambda) = \frac{|H(\lambda)|^2\gamma(\lambda)}{\gamma(2\lambda)}$. La fonction a est de classe $\mathcal{C}^\alpha$ et vérifie $a(0) = 1$ et $a(\lambda) + a(\lambda + \pi) = 1$. Par conséquent la fonction $V(\lambda) = \prod_{k=1}^{+\infty} a(\frac{\lambda}{2^k})$ est définie (cf. lemme 2.1) et les résultats établis dans [5, cf. théorème 8.3] assure que la fonction $g(\lambda) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} V(\lambda + 2k\pi)$ est identiquement égale à 1. En outre, on a de manière évidente $|\hat{\phi}(\lambda)|^2 = \gamma(\lambda)V(\lambda)$. On en déduit que la fonction γ et la série scalaire θ associée à ϕ coïncident sur $\mathbb{R}$. La fonction θ est donc de classe $\mathcal{C}^\alpha$, strictement positive, ce qui entraîne la double inégalité (12) et prouve finalement l'assertion 1.. □

Remarque

Nous pouvons à présent préciser le spectre de l'opérateur P_H sur L_α dans le cas où la propriété (P3) est satisfaite. Rappelons tout d'abord que le fait que H soit un polynôme trigonométrique ne joue aucun rôle dans la démonstration de la proposition 5.6 (cas $d = 1$ ici). Seule la continuité de la série scalaire θ intervient de sorte qu'on a (dans le cadre du théorème 7.3) $\dim \mathrm{Ker}(P_H - Id) = 1$ où P_H est ici considéré comme opérateur sur l'espace des fonctions continues 2π-périodiques. En d'autres termes θ est l'unique fonction P_H-invariante continue (à un scalaire multiplicatif près). D'autre part reprenant les notations établies ci-dessus, il est clair que si f est fonction propre de P_H relativement à une valeur propre α, alors $\theta^{-1}f$ est fonction propre de l'opérateur R relativement à α. Or d'après les résultats de [5, cf. théorème 8.1], on sait que 1 est l'unique valeur propre de R sur le cercle unité. On déduit de ce qui précède que 1 est aussi l'unique valeur propre de P_H sur le cercle unité. Enfin grâce à (63), on obtient que pour toute fonction f continue 2π-périodique, la suite $(P_H^n f)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers la fonction $f(0)\theta$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

7.2. Cas matriciel

L'opérateur P_H associé à une fonction matricielle H est défini par

$$P_H f(\lambda) = H(\frac{\lambda}{2})F(\frac{\lambda}{2})H(\frac{\lambda}{2})^* + H(\frac{\lambda}{2}+\pi)F(\frac{\lambda}{2}+\pi)H(\frac{\lambda}{2}+\pi)^*$$

(cf. paragraphe 4).

La notion de fonction matricielle de classe $\mathcal{C}^\alpha$ est définie dans le paragraphe 2. Enfin rappelons que nous désignons par I la fonction matricielle identiquement égale à la matrice identité dans $\mathcal{M}(d, \mathbb{C})$.

Théorème 7.4. *Si H est une fonction matricielle 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^\alpha(0 < \alpha \leq 1)$, à valeurs dans $\mathcal{M}(d, \mathbb{C})$, vérifiant les conditions (37) et (38), et si l'opérateur P_H associé satisfait à l'hypothèse suivante*

$$\sup_{n \geq 1} \|P^n I\|_\infty < +\infty, \tag{65}$$

alors les fonction $\hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_d$ définies par (6) avec $\vec{x} = M\vec{e_1}$ sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

En outre si la série matricielle θ associée aux fonctions $\phi_1, \ldots, \phi_d$ est continue et si H vérifie (32) et admet un nombre fini p de zéros et vérifie la propriété

$$\forall \lambda \in Z_p, \lambda \neq 0, \exists \mu \in \mathcal{C}(\lambda) \text{ tel que } \det H(\mu + \pi) \neq 0, \tag{66}$$

alors les fonctions $\phi_1, \ldots, \phi_d$ engendrent par translations entières un système de Riesz si, et seulement si, $\det \theta(0)$ *est non nul.*

Les remarques concernant ce théorème sont identiques à celles du cas scalaire. En particulier nous obtenons que les fonctions $\hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_d$ appartiennent à $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ si H vérifie la condition $H(\lambda)H(\lambda)^* + H(\lambda+\pi)H(\lambda+\pi)^* \leq Id$.

Notons en outre que (65) est une condition nécessaire à la propriété (P3). En effet notons H_d^∞ l'espace des fonctions matricielles 2π-périodiques, à valeurs dans l'ensemble des matrices hermitiennes et vérifiant $\|F\|_\infty = \sup \text{ ess } |F(\cdot)|_2 < +\infty$. Plaçons-nous dans le cas général où $\|H\|_\infty < +\infty$ et supposons la propriété (P3) vérifiée, c'est-à-dire que les solutions $\phi_1, \ldots, \phi_d$ de (4) sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ et engendrent un système de Riesz. Reprenons à présent la démarche vue au début de la démonstration du théorème 7.3 en définissant cette fois sur H_d^∞ les opérateurs $R_n F = \theta^{-\frac{1}{2}} P_H^n(\theta^{-\frac{1}{2}} F \theta^{-\frac{1}{2}})\theta^{-\frac{1}{2}} (n \in \mathbb{N}^*)$, où l'on a désigné par θ la série matricielle associée aux fonctions $\phi_1, \ldots, \phi_d$. On montre alors, grâce à la double inégalité (12), qu'il existe une constante $c > 0$ telle que l'on ait pour toute fonction F dans H_d^∞, $|P_H^n F(\lambda)|_2 \leq c\|F\|_\infty$, ce qui prouve la propriété (65).

Enfin notons que θ est continue dès que les fonctions $\phi_1, \ldots, \phi_d$ sont suffisamment localisées à l'infini (par exemple si $|\phi_1(x)| + \cdots |\phi_d(x)| \leq c(1+|x|)^{-2}$).

Démonstration du théorème 7.4 Les techniques établies dans le cas scalaire s'étendent sans difficultés au cadre vectoriel, les ensembles $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^+$ devant être remplacés respectivement par l'espace $\mathcal{M}(d, \mathbb{C})$, l'espace $H(d, \mathbb{C})$ des matrices hermitiennes et enfin l'ensemble des matrices hermitiennes positives. Ainsi nous désignerons ici par B l'espace des fonctions 2π-périodiques, continues à valeurs dans $\mathcal{H}(d, \mathbb{C})$, muni de la norme $\|F\|_\infty = \sup_\lambda |F(\lambda)|_2$ $(F \in B)$ et par L_α, le sous-espace de B composé des fonctions de classe $\mathcal{C}^\alpha$. Pour $F \in L_\alpha$, nous posons

$$m_\alpha(F) = \sup\left\{\frac{|F(x)-F(y)|_2}{|x-y|^\alpha}, x, y \in [0, 2\pi], x \neq y\right\}.$$

Enfin nous munissons l'espace L_α de la norme $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty + m(F)$. L'opérateur P_H est de manière évidente borné sur $(B, \|\cdot\|_\infty)$. Par ailleurs on montre aisément par récurrence que

$$P_H^n F(\lambda) = \sum_{\delta_1, \ldots, \delta_n \in \{T_0, T_1\}} H(\delta_1 \lambda) \cdots H(\delta_n \cdots \delta_1 \lambda) F(\delta_n \cdots \delta_1 \lambda) H(\delta_n \cdots \delta_1 F)^* \cdots H(\delta_1 \lambda)^*.$$

La différence avec le cas scalaire réside dans le fait que l'anneau $\mathcal{M}(d, \mathbb{C})$ n'est pas commutatif. Cependant ceci n'importe pas dans les calculs rencontrés pour établir le lemme 7.2 et l'on montre comme dans le cas scalaire qu'il existe pour tout entier $n \geq 1$ une constante $R_n > 0$ telle que l'on ait pour toute fonction F dans L_α, $\|P_H^n F\| \leq 2^{-n\alpha}\|P_H^n I\|_\infty \|F\| + R_n \|F\|_\infty$, ce qui prouve en particulier que P_H est borné sur $(L_\alpha, \|\cdot\|)$. Par conséquent l'opérateur P_H va satisfaire aux hypothèses du théorème de Ionescu-Tulcéa et Marinescu. Reprenons pour simplifier les notations utilisées dans le cas scalaire. On montre alors dans un premier temps qu'il existe dans l'espace $E = \oplus_{|\lambda_i|=1} \mathrm{Ker}(\lambda_i Id - P_H)$ (qui est de dimension finie) une fonction matricielle G telle que $G(\lambda)$ soit hermitienne positive pour tout réel λ et vérifie la propriété $G(0)\vec{e_1} = \vec{e_1}$. Utilisant l'ensemble convexe compact $\Gamma = \{F \in E, F(\lambda) \geq 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, F(0)\vec{e_1} = \vec{e_1}, \|F\|_1 \leq \|G\|_1\}$ où $\|\cdot\|_1$ est définie comme dans le cas scalaire, on montre grâce au théorème de Schauder-Tychonoff qu'il existe un élément γ de Γ P_H-invariante. On conclut alors comme pour le théorème 5.1, à savoir grâce au lemme 5.2 et au lemme de Fatou.

Démontrons à présent la dernière assertion du théorème. Le sens direct de l'équivalence est évident. Réciproquement supposons que $\det \theta(0)$ soit non nul et démontrons que θ vérifie la double inégalité (12). La seconde inégalité de (12) est satisfaite car θ est continue. Pour prouver la première inégalité de (12), on procède par l'absurde en supposant qu'il existe un réel $\lambda \in]0, 2\pi[$ tel que $\det \theta(\lambda) = 0$. Les techniques établies dans la démonstration du théorème 5.4 s'appliquent ici et on obtient qu'il existe un réel x élément de 0_λ, non contenu dans Z et vérifiant $\det \theta(x) = 0$. Enfin d'après l'hypothèse sur les zéros de $\det H(\cdot)$, on sait qu'il existe un réel y élément de 0_x, vérifiant $\det \theta(y) = 0$ et tel que 0_y ne contienne aucun zéro de H. On en déduit que $\det \theta(\frac{y}{2^k})$ est nul pour tout entier $k \geq 0$, ce qui est impossible car $\det \theta(0) \neq 0$. Le théorème est ainsi démontré. □

Conclusion

Nous avons répondu aux problèmes posés dans l'introduction, à savoir : étant donnée une fonction H scalaire ou matricielle, nous disposons de critères (cf. paragraphe 5 et 7) précisant si les fonctions $\phi_1, \ldots, \phi_d$ solutions de l'équation (4) associée à H sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ et dans ce cas, si ces fonctions engendrent par translations entières un système de Riesz. Avant de dégager les possibilités de construction dans le cadre vectoriel, nous rappelons brièvement les différents points de vue adoptés dans le cas scalaire.

Considérons tout d'abord une analyse multi-échelle $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ quelconque, une fonction d'échelle ϕ et notons θ la série scalaire associée à cette dernière. Reprenant les notations et résultats du paragraphe 3, on sait que les fonctions $\tilde{\phi}$ et σ définies par $\hat{\tilde{\phi}}(\lambda) = \theta^{-1}(\lambda)\hat{\phi}(\lambda)$ puis $\hat{\sigma}(\lambda) = \theta^{-\frac{1}{2}}(\lambda)\hat{\phi}(\lambda)$, engendrent par translations entières respectivement, la base duale dans V_0 de $\{\phi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$, et une base orthonormée de V_0. Nous disposons donc des convergences suivantes dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} 2^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\phi}(2^n \cdot -k)\rangle \phi(2^n x - k) \tag{67}$$

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} 2^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \sigma(2^n \cdot -k)\rangle \sigma(2^n x - k). \tag{68}$$

Si ϕ est à support compact, la série intervenant dans (67) est en fait une somme finie pour x fixé. Cependant dans ce cas les fonctions $\tilde{\phi}$ et σ ne sont pas à support compact, ce qui rend difficile dans la pratique le calcul des coefficients $\langle f, \tilde{\phi}(2^n \cdot -k)\rangle$ ou l'utilisation de (68). Notons qu'aucune hypothèse n'est faite jusqu'ici sur l'analyse multi-échelle, la fonction d'échelle ϕ, ou encore le filtre H associé à ϕ par l'équation (2).

Le second point de vue consiste à imposer au départ des conditions sur H afin d'obtenir des propriétés précises sur la fonction ϕ solution de (2) (localisation, régularité, propriété de la famille composée de translatés entières de ϕ). Par exemple nous savons que partant d'un polynôme trigonométrique H, la solution ϕ est à support compact. Le problème concernant la régularité de ϕ est beaucoup plus délicat. Les différentes méthodes relatives à cette question sont basées sur la formule $\prod_{k=1}^{+\infty} \cos\frac{\lambda}{2^k} = \frac{\sin\lambda}{\lambda}$. En effet, on sait qu'une condition nécessaire pour que ϕ soit de carré intégrable est que H s'annule en π. Si par exemple H est un polynôme trigonométrique, on écrit

$$|H(\lambda)|^2 = (\cos\frac{\lambda}{2})^{2p}|V(\lambda)|^2, \tag{69}$$

où V est un polynôme trigonométrique ne s'annulant pas en π. Il vient que $\hat{\phi}(\lambda) = \left(\frac{\sin\frac{\lambda}{2}}{\frac{\lambda}{2}}\right)^{2p} \prod_{k=1}^{+\infty} |V(\frac{\lambda}{2^k})|^2$. J.-P. Conze montre dans [3] que l'ordre de régularité de ϕ défini par $\alpha = \sup\{s > 0 | \int_{\mathbb{R}} |\hat{\phi}(\lambda)|^2(1+|\lambda|^{2s})d\lambda < +\infty\}$ est situé dans l'intervalle $[p - 0.5\log_2\alpha - 0.5, p - 0.5\log_2\alpha + 0.5]$ où α est la plus grande valeur propre positive de l'opérateur

P_V associé au polynôme trigonométrique V. On peut évidemment définir de manière différente l'ordre de régularité de ϕ (cf. [2], [6]).

La propriété souhaitée sur la famille des translatés entières de ϕ fournit une condition importante sur H (dite condition algébrique). Si par exemple on désire construire un système orthonormé (on dit que ϕ est une "ondelette orthogonale"), alors H doit satisfaire à la condition orthogonale $|H(\lambda)|^2 + |H(\lambda+\pi)|^2 = 1$ et on sait que réciproquement, cette condition adjointe à des hypothèses de nature géométrique sur les zéros de H (cf. [5]) entraîne que la fonction ϕ engendre un système orthornormé. I. Daubechies [6] construit ainsi pour chaque entier $p \geq 1$ une ondelette orthogonale à support compact et de classe $\mathcal{C}^p$. Suivant le même ordre d'idée on peut construire (cf. [2]) des couples $(\phi, \tilde{\phi})$ de fonctions d'échelle à support compact vérifiant la condition de biorthogonalité $\langle\phi(\cdot - k), \tilde{\phi}(\cdot - \ell)\rangle = \delta_{k,\ell}$ $(k, \ell \in \mathbb{Z})$. Notons que les polynômes trigonométriques H et $\tilde{H}$ associés par (2) respectivement aux fonctions ϕ et $\tilde{\phi}$ vérifient nécessairement $H(\lambda)\overline{\tilde{H}(\lambda)} + H(\lambda+\pi)\overline{\tilde{H}(\lambda+\pi)} = 1$ (utiliser pour cela la condition de biorthogonalité et la formule sommatoire de Poisson). A. Cohen montre qu'inversement il est possible, partant de deux polynômes trigonométriques satisfaisant à l'hypothèse ci-dessus, de construire des ondelettes biorthogonales. Notons que les familles composées des translations entières respectivement de ϕ et $\tilde{\phi}$ n'engendrent pas le même espace dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Autrement dit nous ne cherchons pas à construire comme dans le paragraphe 3 une fonction $\tilde{\phi}$ contenue dans l'espace engendré par les translatés entières de ϕ. C'est pourquoi il n'y a pas d'obstruction à obtenir deux fonctions ϕ et $\tilde{\phi}$ à support compact.

Une autre condition algébrique, de nature tout à fait différente des deux précédentes, résulte de la construction d'ondelettes interpolantes (cf. paragraphe 6.1) et s'écrit $H(\lambda) + H(\lambda+\pi) = 1$ (découle de l'identité $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\phi}(\lambda+2k\pi) = 1$ qui exprime que $\phi(n) = \delta_{0,n}$, $n \in \mathbb{Z}$). A notre connaissance aucune étude systèmatique n'a été entreprise concernant la réciproque. On souhaiterait en effet, partant de la condition ci-dessus sur H, disposer de critères assurant que la fonction ϕ associée vérifie la condition d'interpolation écrite ci-dessus.

Au vu de cette liste (non exhaustive) des constructions d'ondelettes classiques, nous allons essayer de présenter d'éventuelles généralisations au cadre vectoriel. Les critères relatifs à (P2) et (P3) sont sensiblement les mêmes que ceux du cas scalaire et tout à fait utilisables dans la pratique quand H est un polynôme trigonométrique à coefficients matriciels, puisqu'ils reposent sur le calcul de valeurs propres d'une matrice. Si on note $\phi_1, \ldots, \phi_d$ les solutions de (4) et V_0 l'espace engendré dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ par les translatés entières de ces d fonctions, alors les fonctions $\tilde{\phi}_1, \ldots, \tilde{\phi}_d$ (respectivement $\sigma_1, \ldots, \sigma_d$) définies par (17) (respectivement (18)) engendrent par translations entières la base de Riesz duale de $\{T^k\phi_i, i = 1, \ldots, d,\ k \in \mathbb{Z}\}$ dans V_0 (respectivement une base orthonormée de V_0), ce qui fournit les formules d'approximation suivantes dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{d} \sum_{k\in\mathbb{Z}}^{d} 2^n \langle f, \tilde{\phi}_i(2^n \cdot - k)\rangle \phi_i(2^n x - k) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{d} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^n \langle f, \sigma_i(2^n \cdot - k)\rangle \sigma_i(2^n x - k). \end{aligned}$$

Notons que ces convergences sont vérifiées dans des espaces autres que $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ dès que les fonctions ϕ_i et $\tilde{\phi}_i$ (respectivement σ_i) sont suffisamment régulières et localisées à l'infini. Si par exemple les fonctions ϕ_i sont à support compact et de classe $\mathcal{C}^r (r \in I\!N^*)$ alors les convergences ci-dessus sont satisfaites dans les espaces de Sobolev $I\!L^p_r(I\!R)$ $(1 \leq p < +\infty)$ ou encore au sens de la convergence presque-partout. D'autre part dans ce cas, la série intervenant dans la première des deux convergences ci-dessus est une somme finie pour x fixé. Cependant comme dans le cas scalaire, les fonctions $\tilde{\phi}_i$ et σ_i ne sont pas à support compact, ce qui pose des problèmes dans la pratique. Ainsi, pour obtenir des formules d'approximation efficaces, nous devons suivre la même démarche que dans le cas scalaire, c'est-à-dire déterminer des méthodes de construction permettant d'obtenir des propriétés précises sur les ondelettes $\phi_1, \ldots, \phi_d$ (décroissance, régularité, propriété de la famille des translatés entières des fonctions $\phi_1, \ldots, \phi_d$). Les problèmes concernant la décroissance se résolvent comme dans le cas scalaire. En particulier si H est un polynôme trigonométrique à coefficients matriciels alors les solutions $\phi_1, \ldots, \phi_d$ de (4) sont à support compact (cf. paragraphe 4). En revanche la régularités pose problème. En effet l'anneau $\mathcal{M}(d, \mathbf{C})$ n'est pas commutatif, ce qui rend inefficace toute méthode basée sur une factorisation matricielle analogue à (69). Nous disposons cependant d'un test simple (sur les valeurs propres de l'opérateur P_H) permettant de décrire l'ordre de régularité des fonctions $\phi_1, \ldots, \phi_d$ défini par l'entier $n = \sup\{p \in I\!N | \int_{I\!R}(|\hat{\phi}_1(\lambda)|^2 + \cdots + |\hat{\phi}_d(\lambda)|^2)(1 + |\lambda|^{2p})d\lambda < +\infty\}$.

A ce premier problème il faut ajouter le fait que la propriété $\dim \mathrm{Ker}(P_H - Id) = 1$ vérifiée dans le cas scalaire ne l'est plus en général dans le cas vectoriel (cf. proposition 5.6). Si par exemple on souhaite construire des fonctions d'échelle $\phi_1, \ldots, \phi_d$ engendrant par translations entières un système orthonormé, alors la condition algébrique est donnée par $H(\lambda)H(\lambda)^* + H(\lambda+\pi)H(\lambda+\pi)^* = Id$, et réciproquement, étant donnée une fonction matricielle H vérifiant cette dernière hypothèse, on sait que les solutions $\phi_1, \ldots, \phi_d$ de (4) sont de carré intégrable sur $I\!R$. La fonction matricielle I identiquement égale à la matrice Id dans $\mathcal{M}(d, \mathbf{C})$ et la série matricielle θ associée à ces d dernières fonctions sont toutes les deux P_H-invariantes, mais à la différence du cas scalaire on ne peut conclure, du moins de manière systèmatique, que θ et I coïncident, c'est-à-dire que la famille des translatés entières de $\phi_1, \ldots, \phi_d$ est orthornormée. Dans le cas où H est un polynôme trigonométrique (ou plus généralement si θ est continue), les fonctions θ et I coïncident si on a $\theta(0) = Id$ (cf remarque et proposition 5.6), ce qui en pratique nécessite un calcul approché de $\theta(0)$. Notons pour clore ce point que les bases d'ondelettes orthogonales du cadre vectoriel ne présentent à priori guère d'intérêt par rapport à celles du cas scalaire.

En revanche l'aspect matriciel apparaît de manière naturelle dans la théorie d'interpolation dyadique d'ordre d (cf. paragraphe 6.2), et ceci de manière non réductible au cas scalaire si l'on excepte les exemples tels que ceux issus des fonctions splines (cf. paragraphe 3). Rappelons que la condition algébrique s'écrit $H(\lambda) + H(\lambda+\pi) = \mathrm{diag}(1, 2^{-1}, \ldots, 2^{-d})$. Comme dans le cas scalaire, le problème est de savoir si en retour il est possible de préciser les hypothèses sur H, qu'il faut adjoindre à la condition ci-dessus, pour que les fonctions d'échelle $\phi_0, \ldots, \phi_d$ associées forment une famille de fonctions principales, c'est-à-dire vérifient $\phi_i^{(j)}(n) = \delta_{0,n}\delta_{i,j}$ $(n \in Z\!\!Z, i, j = 0, \ldots, d)$.

Références

[1] COHEN A. *Ondelettes, analyses multirésolutions et filtres miroirs en quadrature* 1989, preprint.

[2] COHEN A. Thèse, Université Paris-Dauphine, 1990.

[3] CONZE J.-P. *Sur la régularité des solutions d'une équation fonctionnelle* Juin 1989, note interne.

[4] CONZE J.-P. *Analyse multi-échelle : principe et construction* Cours 3ème cycle, juin 1989.

[5] CONZE J.-P. ET RAUGI A. *Fonctions harmoniques pour un opérateur de transition et applications.* Bull. Soc. Math. France, 118, 1990, p. 273-310.

[6] DAUBECHIES I. *Orthonormal basis of compactly supported wavelets.* Communications in pures and applied mathematics, t. XLI, n° 7, 1988, p. 909-996.

[7] DESLAURIERS G., DUBOIS J., DUBUC S. *Interpolation dyadique, dans "Fractals, dimensions non entières et applications"* Publié par G. Cherbit, Masson, 1987.

[8] DUNFORD N. ET SCHWARTZ J.-T. *Linear operator, Part. I*

[9] HENNION H. *Décomposition spectrale des opérateus de Doeblin-Fortet* à paraître.

[10] HOLSCHNEIDER M., KRONLAND-MARTINET R., MORLET J., TCHAMITCHIAN PH. *L'algorithme à trous* To be published in "Ondelettes de Phases", editors J.-M. Combes, A. Grossmann et Ph. Tchamitchian, (P.T., C.N.R.S.-Luminy, Case 907, 13288 Marseille cedex 9).

[11] IONESCU-TULCÉA C.T. AND MARINESCU G. *Théorie ergodique pour une classe d'opérations non complétement continues* Annals of Math., T. 52, 1950, p. 140-147.

[12] MALLAT S. *Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of* $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ Trans. Amer. Mar. Soc., t. 315, n° 1, 1989, p. 69-88.

[13] MERRIEN J.-L. *A family of* C^1 *interpolants built by dichotomy* L.A.N.S., I.N.S.A., Rennes, novembre 1989.

[14] MEYER Y. *Ondelettes et opérateurs I* Hermann, 1990.

[15] NORMAN M.-F. *Markov processes and learning models* Academic Press, 1972.

[16] SCHUMAKER L.L. *Approximations by splines* Edited by Greville (T.N.E.), theory and Applications of spline functions Academic Press, New York, London.