ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

LOÏC HERVÉ

Étude d'opérateurs quasi-compacts positifs. Applications aux opérateurs de transfert

Annales de l'I. H. P., section B, tome 30, nº 3 (1994), p. 437-466

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1994__30_3_437_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 30, n° 3, 1994, p. 437-466 *Probabilités et Statistiques*

Étude d'opérateurs quasi-compacts positifs. Applications aux opérateurs de transfert

par

Loïc HERVÉ

I.R.M.A.R., Laboratoire de Probabilités,
Université de Rennes 1,
Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France.

RÉSUMÉ. – Soit X un espace métrique compact, $\{\eta(x, \cdot),\ x \in \mathrm{X}\}$ une famille de mesures positives sur X, et P l'opérateur positif défini par $\mathrm{P}f(x) = \int_{\mathrm{X}} f(y)\,\eta(x, dy)$, que nous supposons continu sur $\mathcal{C}(\mathrm{X})$ et quasi-compact sur l'espace E^{α} des fonctions α-hölderiennes sur X où $0 < \alpha \leqq 1$. On sait qu'il existe alors un entier ν tel que $\bigcup_{l=1}^{+\infty} \mathrm{Ker}\,(\mathrm{P}' - \rho)^{l} = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{P}' - \rho)^{\nu}$, où ρ est le rayon spectral de P, et $\mathrm{P}' = \mathrm{P}_{|\mathrm{E}^{\alpha}}$. L'objet de ce travail est d'expliciter une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $\gamma > 0$ dans $\mathcal{C}(\mathrm{X})$ telle que $(\mathrm{P} - \rho)^{\nu}\,\gamma = 0$. Sous cette condition nous décrivons, quand $\nu = 1$ l'espace $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{P} - \rho)$, et pour $\rho = 1$ et $\nu \geqq 1$ les mesures P-invariantes. Nous appliquons l'étude aux opérateurs de transfert.

Mots clés : quasi-compacité, opérateur positif, spectre.

ABSTRACT. – Let X be a compact metric space, $\{\eta(x, \cdot),\ x \in \mathrm{X}\}$ a family of non negative measures on X, and P the positive operator defined by $\mathrm{P}f(x) = \int_{\mathrm{X}} f(y)\,\eta(x, dy)$, which we suppose to be bounded on $\mathcal{C}(\mathrm{X})$ and quasi-compact on the space E^{α} of α-hölderian functions where $0 < \alpha \leqq 1$. We known that there exists an integer ν such that

Classification A.M.S. : 47 B 07, 47 B 65, 58 F 11.

Annales de l'Institut Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques - 0246-0203
Vol. 30/94/03/$ 4.00/© Gauthier-Villars

$\bigcup_{l=1}^{+\infty}$ Ker $(P' - \rho)^l = \operatorname{Ker}(P' - \rho)^\nu$, where ρ is the spectral radius of P, and $P' = P_{|E^\alpha}$. The object of this work is to give a necessary and sufficient condition for the existence of a $\gamma > 0$ in $\mathcal{C}(X)$ such that $(P - \rho)^\nu \gamma = 0$. In this case we describe, when $\nu = 1$ the space $\operatorname{Ker}(P - \rho)$, and for $\rho = 1$ and $\nu \geqq 1$ the P-invariant measures. We give applications to transfert operators.

1. INTRODUCTION

Soit (X, *d*) un espace métrique compact, et $(E, \|\cdot\|_\infty)$ l'espace des fonctions continues sur X muni de la norme uniforme. Rappelons qu'un opérateur défini sur $\mathbb{L}^\infty(X)$ est dit positif s'il laisse invariant le cône formé par les fonctions à valeurs positives.

Soit P un opérateur positif borné sur E, et ρ son rayon spectral. La théorie spectrale classique des opérateurs positifs [22] assure que, si la résolvante R de P admet un pôle sur le cercle $\mathcal{C}_\rho$ de centre 0 et de rayon ρ, alors ρ est une valeur propre, et plus précisément un pôle de la résolvante d'ordre maximal sur $\mathcal{C}_\rho$. C'est par exemple le cas si P est un opérateur positif compact sur E, et ρ admet alors une fonction propre à valeurs positives ou nulles (théorème de Krein-Rutman [22]).

Comme le montre la définition ci-après, l'hypothèse de quasi-compacité ([15], [13], [8]) (valable pour un opérateur non nécessairement positif) est parfaitement adaptée à la condition ci-dessus sur la résolvante :

DÉFINITION. – *Soit* $(L, |||\cdot|||_L)$ *un espace de Banach complexe. Un opérateur* T, *borné sur* L, *de rayon spectral* $\rho(T)$, *est dit quasi-compact s'il existe un réel* r, $0 \leqq r < \rho(T)$, *et deux sous-espaces* N *et* F *supplémentaires dans* L, *stables par* T, *tels que*

$1 \leqq \dim N < +\infty$ et $T_{|N}$ n'a que des valeurs propres de module $\geqq r$,

F est fermé et le rayon spectral de $T_{|F}$ est strictement inférieur à r.

La borne inférieure des réels r satisfaisant à la propriété ci-dessus est appelée rayon spectral essentiel de T. Les conditions classiques de Doeblin-Fortet, notamment celles du théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu, fournissent une classe importante d'opérateurs quasi-compacts. Plus précisément on montre dans [8] le résultat suivant :

S'il existe une norme $||\cdot||$ sur L telle que T soit compact de $(\mathrm{L}, |||\cdot|||_{\mathrm{L}})$ dans $(\mathrm{L}, ||\cdot||)$, et si, pour chaque entier $n \geqq 1$, il existe des réels positifs R_n et r_n tels que l'on ait, $\liminf_{n\to+\infty} (r_n)^{1/n} < \rho(\mathrm{T})$, et pour tout $f \in \mathrm{L}$,

$$|||\mathrm{T}^n f|||_{\mathrm{L}} \leqq \mathrm{R}_n ||f|| + r_n |||f|||_{\mathrm{L}},$$

alors T est quasi-compact. En fait, T vérifie la définition ci-dessus avec $r = \liminf_{n\to+\infty} (r_n)^{1/n}$.

La propriété de quasi-compacité a été beaucoup utilisée en théorie des probabilités, notamment pour l'étude des opérateurs de transitions [16], mais également pour établir des théorèmes limites ([7], [14], [8]). L'ensemble L considéré est souvent l'espace E^α des fonctions α-hölderiennes sur X, où $0 < \alpha \leqq 1$. En effet, d'une part les inégalités de Doeblin-Fortet s'obtiennent facilement avec la norme hölderienne usuelle (*cf.* § 2.4 et 3.2), et d'autre part les espaces E^α s'introduisent naturellement dans la dynamique symbolique ([19], [1], [17]) qui constitue également un champ important pour l'utilisation des opérateurs quasi-compacts. On trouvera dans [6] une présentation générale des différents domaines dans lesquels interviennent les techniques d'opérateurs quasi-compacts. Mentionnons enfin que les propriétés spectrales de quasi-compacité ont été précisées pour les opérateurs définis sur un espace d'Hölder $\mathcal{C}^r$ avec $r \geqq 1$ [20], et généralisées, sous des hypothèses classiques d'équicontinuité, au cas des opérateurs de transitions définis uniquement sur E [18].

Dans ce travail nous étudions les opérateurs à noyaux positifs bornés sur E, et quasi-compacts sur E^α. Plus précisément, étant donné une famille $\{\eta(x,\cdot),\ x \in \mathrm{X}\}$ de mesures positives sur X telles que $\sup_{x\in\mathrm{X}} \eta(x, \mathrm{X}) < +\infty$, nous considérons dans le paragraphe suivant l'opérateur P défini sur $\mathbb{L}^\infty(\mathrm{X})$ par

$$\mathrm{P}f(x) = \int_{\mathrm{X}} f(y)\,\eta(x, dy), \quad x \in \mathrm{X}.$$

Il est clair que P est positif. Nous supposerons en outre que P est un opérateur borné sur E, qu'il laisse invariant l'espace des fonctions hölderiennes d'ordre α où $0 < \alpha \leqq 1$, et enfin que P est quasi-compact sur ce dernier espace.

Grâce aux techniques présentées dans [8], nous redémontrons que le rayon spectral ρ de P est une valeur propre d'indice fini ν sur E^*, et qu'il lui est associé une fonction propre γ régulière à valeurs positives ou nulles. Dans le cas particulier des opérateurs de transitions (on a alors $\mathrm{P}1_{\mathrm{X}} = 1_{\mathrm{X}}$ et $\rho = 1$), une étude plus précise de l'espace des fonctions de E solutions de $\mathrm{P}f = f$ est faite dans [16] sous une condition assez forte d'irréductibilité. L'objet de ce travail est de s'affranchir de l'hypothèse d'irréductibilité, et de déterminer la dimension et une base particulière, de l'espace des fonctions continues solutions de $Pf = \rho f$ quand $\nu = 1$, et de l'espace $\mathcal{M}$ des mesures P-invariantes quand $\rho = 1$. Commençons par remarquer que si la fonction γ ci-dessus est à valeurs strictement positives, on peut considérer l'opérateur relativisé $\tilde{P}$ de P défini par

$$\tilde{P}f(x) = \rho^{-1}\gamma(x)^{-1}\,P(f\gamma)(x), \quad x \in X.$$

Comme $\tilde{P}1_X = 1_X$, $\tilde{P}$ appartient à la famille des opérateurs de transitions étudiés dans [16]. On a $\operatorname{Ker}(P - \rho) = 1/\gamma . \operatorname{Ker}(\tilde{P} - 1)$ et, si $\rho = 1$, $\mathcal{M} = \{1/\gamma\, d\mu,\ \mu \in \tilde{\mathcal{M}}\}$, où $\tilde{\mathcal{M}}$ est l'espace des mesures $\tilde{P}$-invariantes. Par conséquent les résultats de [16], basés sur les propriétés de noyaux ergodiques, permettent de décrire les deux espaces mentionnés ci-dessus.

Nous nous proposons donc dans le paragraphe 2 de

(**A**) trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction $\gamma > 0$ régulière telle que $P\gamma = \rho\gamma$, et de décrire sous cette dernière condition l'espace des fonctions continues solutions de $Pf = \rho f$, et l'espace des mesures P-invariantes quand $\rho = 1$.

(**B**) généraliser l'étude de $\mathcal{M}$ (évidemment quand $\rho = 1$) dans le cas $\nu \geqq 2$.

La résolution du problème (**A**) est une simple généralisation des techniques de [16]. Pour l'étude de (**B**), nous supposons $\rho = 1$ et $\nu \geqq 2$, ce qui interdit l'existence d'une fonction $\gamma > 0$ telle que $P\gamma = \gamma$, et nous cherchons une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $g_0 > 0$ telle que $(P - 1)^\nu g_0 = 0$. Nous explicitons sous cette dernière condition la dimension et une base de $\mathcal{M}$.

Soit maintenant $X = [0, 1]$, et u une fonction continue à valeurs positives ou nulles sur $[0, 1]$. Posant pour $x \in [0, 1]$,

$$\eta(x, \cdot) = u\left(\frac{x}{2}\right)\delta_{\frac{x}{2}} + u\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\delta_{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}},$$

on retrouve l'opérateur de transfert, noté en général P_u, défini par

$$P_u f(x) = u\left(\frac{x}{2}\right) f\left(\frac{x}{2}\right) + u\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right) f\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right).$$

Ce type d'opérateurs a fait l'objet de nombreux travaux dans le cas normalisé, c'est-à-dire quand u vérifie $u(x) + u\left(x+\frac{1}{2}\right) = 1$ pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Ceux-ci portent essentiellement sur le comportement de la suite des itérés $(P_u^n,\ n \in \mathbb{N})$, lié à la détermination des fonctions continues invariantes par P_u, ainsi que sur la nature des mesures de probabilité P_u-invariantes. Cette étude est présentée, sous des hypothèses de régularité ou de stricte positivité de u dans [21], [12], [16], [23], et dans [4] sous des conditions plus générales sur la régularité de u et sur les zéros de u. Signalons que la quasi-compacité de P_u est assurée si u est hölderienne d'ordre α.

Dans le paragraphe 3, nous commençons par rappeler quelques propriétés sur les compacts invariants [4], et nous explicitons une hypothèse très générale sur u qui nous permettra d'appliquer aux P_u, de manière simple et explicite, les résultats du paragraphe 2. Mentionnons que les opérateurs P_u jouent un rôle important dans la construction et l'étude des analyses multirésolutions ([4], [3], [2], [9]). Enfin on trouvera dans [10] une généralisation des opérateurs de transfert au cadre matriciel, et son application aux ondelettes.

Je remercie Jean-Pierre Conze et Albert Raugi pour leurs conseils et encouragements lors de la préparation de ce travail.

2. ÉTUDE SPECTRALE DE P

Dans ce paragraphe, X est un espace métrique compact, $\{\eta(x,\cdot),\ x \in \mathrm{X}\}$ une famille de mesures positives sur X telles que $\sup_{x \in \mathrm{X}} \eta(x, \mathrm{X}) < +\infty$. On note P l'opérateur positif défini sur $\mathbb{L}^{\infty}(\mathrm{X})$ par

$$\mathrm{P}f(x) = \int_{\mathrm{X}} f(y)\,\eta(x, dy), \qquad x \in \mathrm{X}.$$

Nous supposons désormais que P est un opérateur borné sur E, et qu'il est quasi-compact sur l'espace E^{α} des fonctions α-hölderiennes dont nous rappelons la définition ci-dessous.

Pour tout compact A de X, nous notons $(\mathrm{E}_{\mathrm{A}},\ \|\ \|_{\mathrm{A},\infty})$ l'espace des fonctions continues sur A, à valeurs dans $\mathbb{C}$, muni de la norme uniforme. Quand A = X, nous notons simplement $(\mathrm{E},\ \|\ \|_{\infty})$ cet espace. Pour $f \in \mathrm{E}_{\mathrm{A}}$, nous désignons par Z (f) l'ensemble des zéros de f.

Soit α un réel tel que $0 < \alpha \leqq 1$. Nous notons $\mathrm{E}_{\mathrm{A}}^{\alpha}$, et plus simplement E^{α} quand A = X, le sous-espace de E_{A} constitué des fonctions vérifiant

$$m_{\mathrm{A},\alpha}(f) = \sup\left\{\frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)^{\alpha}},\ x, y \in \mathrm{A},\ x \neq y\right\} < +\infty.$$

Nous noterons m_{α} au lieu de $m_{\mathrm{X},\alpha}$. Nous munissons $\mathrm{E}_{\mathrm{A}}^{\alpha}$ de la norme $|||\ |||_{\mathrm{A},\alpha}$, notée $|||\ |||_{\alpha}$ quand A = X, définie par :

$$|||f|||_{\mathrm{A},\alpha} = m_{\mathrm{A},\alpha}(f) + \|f\|_{\mathrm{A},\infty}.$$

Enfin si μ est une mesure de Radon sur X, nous notons μP la mesure définie par

$$\int_X f(x)\,(\mu\mathrm{P})\,(dx) = \int_X \mathrm{P}f(x)\,\mu\,(dx).$$

Nous désignons par $\mathcal{M}$ l'espace des mesures de Radon sur X P-invariantes (c'est-à-dire vérifiant $\mu\mathrm{P} = \mu$).

2.1. Compacts absorbants et opérateurs $\mathrm{P_K}$

Compacts absorbants. – La notion de compacts absorbants s'introduit naturellement à travers la remarque suivante : soit $f \in$ E à valeurs positives ou nulles telle que $\mathrm{P}f = \beta f$ avec $\beta > 0$. Alors si $f(x) = 0$, on a $f(y) = 0$ pour tout point y appartenant au support de la mesure $\eta(x, \cdot)$. Autrement dit Z (f) contient le support de $\eta(x, \cdot)$ pour tout $x \in \mathrm{Z}(f)$. L'ensemble fermé Z (f) est un premier exemple de compacts absorbants dont nous donnons maintenant la définition :

Un compact K de X est dit *absorbant* si on a $\eta(x, \mathrm{K}^c) = 0$ pour tout $x \in$ K, c'est-à-dire si K contient le support de $\eta(x, \cdot)$ pour tout $x \in$ K. Nous dirons qu'il est absorbant *minimal* s'il n'existe pas de compact absorbant non vide strictement inclus dans K.

Remarque. – L'étude de $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{P} - \rho)^\nu$ et de $\mathcal{M}$ va dépendre du nombre maximal n_c de compacts absorbants disjoints. Supposons que ce dernier soit fini et considérons n_c compacts absorbants disjoints $\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_{n_c}$. Soit $l \in \{1, \cdots, n_c\}$: il résulte de la définition de n_c que deux compacts absorbants quelconques, inclus dans A_l, se recoupent nécessairement. On en déduit que l'intersection de tous les compacts absorbants contenus dans A_l forme un compact absorbant minimal non vide. Il existe alors une famille de n_c compacts absorbants minimaux disjoints.

Les opérateurs $\mathrm{P_K}$. – Soit K un compact absorbant. Pour tout $f \in \mathrm{E_K}$ et tout $x \in$ K, nous posons

$$\mathrm{P_K}f(x) = \int_\mathrm{K} f(x)\,\eta\,(x, dy), \quad x \in \mathrm{K}.$$

Si K = X on a évidemment $\mathrm{P_X} = \mathrm{P}$. D'après la définition même d'un compact absorbant, $\mathrm{P_K}$ définit un opérateur borné et positif sur $\mathrm{E_K}$, vérifiant en outre pour tout $f \in$ E,

$$\mathrm{P_K}\,(f_{|\mathrm{K}}) = (\mathrm{P}f)_{|\mathrm{K}}, \tag{1}$$

où l'on désigne par $g_{|\mathrm{K}}$ la restriction d'une fonction g à K.

Remarques. – *a*) Il est clair que chaque $\mathrm{P_K}$ est quasi-compact sur $\mathrm{E}_\mathrm{K}^\alpha$.

b) Soit K un compact absorbant, et γ une fonction de E_K, à valeurs positives, vérifiant $P_K \gamma = \beta\gamma$, où $\beta > 0$. Alors l'ensemble $Z(\gamma)$ forme un compact absorbant inclus dans K.

c) Nous verrons que la méthode pour résoudre les points (**A**) et (**B**) de l'introduction consiste à ramener l'étude à un certain nombre de P_K, ce qui est particulièrement intéressant quand K est fini, car P_K s'identifie alors à une matrice.

2.2. Description spectrale des P_K

On désigne par K un compact absorbant quelconque. Soit ρ_K le rayon spectral de P_K sur E_K, et plus simplement ρ pour P. On a

$$\rho_K = \lim_{n \to +\infty} \| P_K^n 1_K \|_{K, \infty}^{1/n},$$

de sorte que $\rho_K \leqq \rho$. Pour toute valeur propre λ de P_K, et tout entier $l \geqq 1$, nous posons

$$N_l(\lambda, P_K) = \operatorname{Ker}(P_K - \lambda)^l \cap E_K^\alpha.$$

Si, pour un entier $i \geqq 1$, les espaces $N_i(\lambda, P_K)$ et $N_{i+1}(\lambda, P_K)$ coïncident, nous noterons

$$\nu(\lambda, P_K) = \inf \{ i \in \mathbb{N}^* : N_i(\lambda, P_K) = N_{i+1}(\lambda, P_K) \}$$

l'indice de λ pour P_K (*cf.* [5]). Pour simplifier, nous noterons $\nu(\lambda)$ pour $\nu(\lambda, P)$ l'indice de λ pour P sur E^α.

THÉORÈME 2.1. – *Sur l'espace E_K^α, P_K admet ρ_K comme rayon spectral et valeur propre, et possède une fonction propre associée à valeurs positives ou nulles, non identiquement nulle. Les valeurs spectrales de module ρ_K sont en nombre fini et constituent des valeurs propres. Pour tout $l \geqq 1$ et toute valeur propre λ de module ρ_K, l'espace $N_l(\lambda, P_K)$ est de dimension finie, et l'on a*

$$\nu(\lambda, P_K) \leqq \nu(\rho_K, P_K) < +\infty.$$

On dispose en outre de la décomposition suivante

$$E_K^\alpha = \oplus_{|\lambda| = \rho_K} N_{\nu(\lambda, P_K)}(\lambda, P_K) \oplus F_K,$$

où F_K est un sous-espace de E_K^α, stable par P_K, et tel que le rayon spectral de $P_{K|F_K}$ soit strictement inférieur à ρ_K.

Remarques. – *a*) On a $\sup_{n \geqq 1} \rho^{-n} \| P^n 1_X \|_\infty < +\infty$ si, et seulement si, $\nu(\rho) = 1$. L'implication directe est évidente. Réciproquement, si $\nu(\rho) = 1$, les valeurs propres de module ρ sont d'indice 1. On conclut grâce à la décomposition spectrale du théorème 2.1.

b) Si il existe γ, à valeurs strictement positives, telle que $\mathrm{P}\gamma = \rho\gamma$, alors $\nu(\rho) = 1$. En effet, on a alors $1_{\mathrm{X}} \leqq c\gamma$, avec $c \in \mathbb{R}_+^*$, d'où $\rho^{-n}\,\mathrm{P}^n\,1_{\mathrm{X}} \leqq c\gamma$ pour tout $n \geqq 1$, et donc $\nu(\rho) = 1$. En particulier si la fonction 1_{X} est P-invariante, on a $\rho = 1$ et $\nu(\rho) = 1$.

Démonstration du théorème. – Afin de simplifier les notations, nous donnons la démonstration uniquement pour P, c'est-à-dire pour K = X. Nous nous inspirons de la preuve donnée dans [8].

Soit ρ_α le rayon spectral de P sur E^α. Grâce à l'hypothèse de quasi-compacité, on sait que les valeurs spectrales λ de module égal à ρ_α sont en nombre fini et forment en fait des valeurs propres d'indice fini telles que $\dim \mathrm{N}_{\nu(\lambda)}(\lambda, \mathrm{P}) < +\infty$. En outre il existe un sous-espace fermé F' de E^α, stable par P, supplémentaire à $\mathcal{N} = \oplus_{|\lambda| = \rho_\alpha} \mathrm{N}_{\nu(\lambda)}(\lambda, \mathrm{P})$ dans E^α, et tel que le rayon spectral de $\mathrm{P}_{|\mathrm{F}'}$ est $< \rho_\alpha$.

La démonstration des autres propriétés utilise la positivité de P : commençons par prouver que $\rho_\alpha = \rho$: on a $\rho = \lim_{n \to +\infty} \|\mathrm{P}^n\,1_{\mathrm{X}}\|_\infty^{1/n}$, $\|\mathrm{P}^n\,1_{\mathrm{X}}\|_\infty \leqq |||\mathrm{P}^n\,1_{\mathrm{X}}|||_\alpha$ et $|||\,1_{\mathrm{X}}|||_\alpha = 1$. On en déduit que $\rho \leqq \rho_\alpha$. Mais, d'après ce qui précède, il existe une valeur propre de module ρ_α pour P sur E^α, d'où nécessairement $\rho_\alpha = \rho$. Démontrons maintenant que

a. Il existe $\gamma \in \mathrm{E}^\alpha$ à valeurs positives ou nulles telle que $\mathrm{P}\gamma = \rho\gamma$:

Désignant par $(t_n)_{n \geqq 1}$ une suite décroissante, convergeant vers 1, nous posons pour tout $n \geqq 1$

$$\gamma_n = (\rho t_n - \mathrm{P})^{-1}\,1_{\mathrm{X}} = \sum_{k \geqq 0} (\rho t_n)^{-(k+1)}\,\mathrm{P}^k\,1_{\mathrm{X}}.$$

Il est clair que γ_n est une fonction positive de E^α. Nous désignerons par $|\cdot|_\infty$ et $|\cdot|_\alpha$ les normes d'opérateurs associées respectivement à $\|\cdot\|_\infty$ et $|||\cdot|||_\alpha$.

Soit λ_0 une valeur propre quelconque de module ρ. Nous obtenons, pour tout $g \in \mathcal{N} = \oplus_{|\lambda| = \rho} \mathrm{N}_{\nu(\lambda)}(\lambda, \mathrm{P})$ et tout $x \in \mathrm{X}$,

$$\begin{aligned} |(\lambda_0\,t_n - \mathrm{P})^{-1}\,g(x)| &\leqq \sum_{k \geqq 0} (\rho t_n)^{-(k+1)}\,\|g\|_\infty\,\mathrm{P}^k\,1_{\mathrm{X}}(x) \\ &= \|g\|_\infty\,\gamma_n(x). \end{aligned}$$

Puisque $\dim \mathcal{N} < +\infty$, il existe une constante $c > 0$ telle que $|||h|||_\alpha \leqq c\,\|h\|_\infty$ pour tout $h \in \mathcal{N}$, d'où

$$\begin{aligned} |||(\lambda_0\,t_n - \mathrm{P})^{-1}\,g|||_\alpha &\leqq c\,\|(\lambda_0\,t_n - \mathrm{P})^{-1}\,g\|_\infty \\ &\leqq c\,\|g\|_\infty\,\|\gamma_n\|_\infty \\ &\leqq c\,|||g|||_\alpha\,|||\gamma_n|||_\alpha. \end{aligned}$$

La théorie spectrale classique [5] nous assure que

$$\lim_{n\to+\infty} |(\lambda_0 t_n - \mathrm{P})^{-1}|_\alpha = +\infty.$$

De l'inégalité ci-dessus, il vient que $\lim_{n\to+\infty} |||\gamma_n|||_\alpha = +\infty$.

Écrivant $1_{\mathrm{X}} = g + f$ où $g \in \mathcal{N}$, $f \in \mathrm{F}'$, nous obtenons $\gamma_n = g_n + f_n$, où l'on a posé $g_n = (\rho t_n - \mathrm{P})^{-1} g$ et $f_n = (\rho t_n - \mathrm{P})^{-1} f$. On a $|||f_n|||_\alpha \leqq \sum_{k\geqq 0} \rho^{-(k+1)} |||\mathrm{P}^k f|||_\alpha < +\infty$, car le rayon spectral de $\mathrm{P}_{|\mathrm{F}'}$ est $< \rho$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} |||\gamma_n|||_\alpha^{-1} |||\gamma_n - g_n|||_\alpha = 0,$$

et par conséquent que la suite $\{ |||\gamma_n|||_\alpha^{-1} g_n,\ n \geqq 1 \}$ est bornée dans l'espace de dimension finie $(\mathcal{N}, |||\ |||_\alpha)$, et donc relativement compacte. Il en résulte que la famille $\{ |||\gamma_n|||_\alpha^{-1} \gamma_n,\ n \geqq 1 \}$ est relativement compacte dans E^α ; on peut donc en extraire une sous-suite convergeant dans E^α vers une fonction γ, positive ou nulle, non identiquement nulle car $|||\gamma|||_\alpha = 1$, et qui, par passage à la limite dans l'égalité $|||\gamma_n|||_\alpha^{-1} (\rho t_n - \mathrm{P})\gamma_n = |||\gamma_n|||_\alpha^{-1} 1$, vérifie bien $(\rho - \mathrm{P})\gamma = 0$.

b. On a $\nu(\lambda_0) \leqq \nu(\rho)$ pour toute valeur propre λ_0 de module ρ :

D'après les résultats classiques de théorie spectrale, λ_0 est un pôle d'ordre $\nu(\lambda_0)$ de la résolvante $z \to (z - \mathrm{P})^{-1}$, ou encore de $z \to (z - \mathrm{P}_{|\mathcal{N}})^{-1}$, de sorte qu'on a

$$\lim_{n\to+\infty} (t_n - 1)^l \,|(\lambda_0 t_n - \mathrm{P}_{|\mathcal{N}})^{-1}|_\alpha = +\infty, \qquad \forall l \leqq \nu(\lambda_0) - 1,$$

d'où, d'après l'inégalité

$$|||(\lambda_0 t_n - \mathrm{P})^{-1} g|||_\alpha \leqq c\, |||g|||_\alpha\, |||(\rho t_n - \mathrm{P})^{-1} 1_{\mathrm{X}}|||_\alpha$$

démontrée ci-dessus pour tout $g \in \mathcal{N}$,

$$\lim_{n\to+\infty} (t_n - 1)^l\, |||(\rho t_n - \mathrm{P})^{-1} 1_{\mathrm{X}}|||_\alpha = +\infty, \qquad \forall l \leqq \nu(\lambda_0) - 1,$$

ce qui prouve bien que $\nu(\rho) \geqq \nu(\lambda_0)$. □

2.3. Étude des fonctions continues solutions de $\mathrm{P}f = \rho f$ et des mesures P-invariantes

D'après ce qui précède, ρ est une valeur propre de P sur E^α, d'indice fini $\nu(\rho)$ que nous noterons ν pour simplifier.

Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une fonction continue $\gamma > 0$ telle que $(\mathrm{P}-\rho)^\nu \gamma = 0$. Sous cette dernière condition, nous étudions tout d'abord le cas $\nu = 1$ en déterminant la dimension et une base particulière de l'espace des fonctions continues solutions de $\mathrm{P}f = \rho f$, et, quand $\rho = 1$, de l'espace $\mathcal{M}$ des mesures P-invariantes. Nous généralisons ensuite l'étude de $\mathcal{M}$ au cas $\nu \geqq 2$.

Remarquons que, si K est un compact absorbant tel que $\rho_{\mathrm{K}} < \rho$, alors toute fonction f de $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{P} - \rho)^\nu$ est identiquement nulle sur K : en effet, tout d'abord si $f \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{P} - \rho)$, on déduit de (1) que $f_{|\mathrm{K}} = 0$. Procédons par récurrence en supposant que toute fonction de $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{P} - \rho)^i$ est identiquement nulle sur K où i est un entier tel que $1 \leqq i \leqq \nu - 1$. Soit $f \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{P} - \rho)^{i+1} - \mathrm{Ker}\,(\mathrm{P} - \rho)^i$. Écrivant $\mathrm{P}f = \rho f + g$, où $g \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{P} - \rho)^i$, il vient que $\mathrm{P}_{\mathrm{K}}\,(f_{|\mathrm{K}}) = \rho f_{|\mathrm{K}}$, d'où $f_{|\mathrm{K}} = 0$, ce qui prouve finalement la propriété annoncée.

En conséquence, pour qu'il existe dans $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{P} - \rho)^\nu$ une fonction strictement positive, il faut que $\rho_{\mathrm{K}} = \rho$ pour tout compact absorbant K.

2.3.1. Cas où $\nu = 1$

Soit n_c le nombre maximal de compacts absorbants disjoints. Évidemment ce nombre peut être infini. Si au contraire n_c est fini, nous notons $\mathrm{K}_1, \cdots, \mathrm{K}_{n_c}$ n_c compacts absorbants minimaux disjoints.

THÉORÈME 2.2. – *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe une fonction $\gamma \in \mathrm{E}^\alpha$ strictement positive sur* X *telle que* $\mathrm{P}\gamma = \rho\gamma$.

2. *On a $\nu = 1$, et $\rho_{\mathrm{K}} = \rho$ pour tout compact* K *absorbant.*

3. *On a $\nu = 1$, $n_c < +\infty$, et $\rho_{\mathrm{K}_l} = \rho$ pour chaque $l = 1, \cdots, n_c$.*

THÉORÈME 2.3. – *Description de* $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{P} - \rho)$. *Sous l'une quelconque des conditions* 1, 2 *et* 3, *l'espace des fonctions continues sur* X *solutions de l'équation* $\mathrm{P}f = \rho f$ *admet une base* $(\gamma_1, \cdots, \gamma_{n_c})$ *formée de fonctions de* E^α, *positives ou nulles sur* X, *vérifiant* $\gamma_{i_{|\mathrm{K}_j}} \equiv 0$ *pour tous* $i, j \in \{1, \cdots, n_c\}$ *tels que* $i \neq j$. *En particulier toute fonction continue f telle que* $\mathrm{P}f = \rho f$ *appartient à* E^α.

THÉORÈME 2.4. – *Description de* $\mathcal{M}$. *On suppose que* $\rho = 1$. *Sous l'une quelconque des conditions* 1, 2 *et* 3, *l'espace* $\mathcal{M}$ *des mesures* P-*invariantes admet une base* $(\mu_1, \cdots, \mu_{n_c})$ *formée de mesures positives telles que le support de chaque* μ_i *soit inclus dans* K_i.

Remarque. – Si K est un compact absorbant de cardinal fini, l'hypothèse $\rho_{\mathrm{K}} = \rho$ se vérifie facilement car P_{K} s'identifie à une matrice.

Démonstration du théorème 2.2. – Quitte à remplacer P par ρ^{-1} P, on peut supposer que $\rho = 1$. Nous avons déjà remarqué que l'existence d'une fonction P-invariante continue et strictement positive entraîne $\nu = 1$. L'implication $1 \Rightarrow 2$ résulte de cette remarque et du fait que toute fonction strictement positive P-invariante induit sur chaque compact absorbant K une fonction de E_K P_K-invariante à valeurs strictement positives. Démontrons maintenant le

LEMME 2.5. – *Soit* K *un compact absorbant minimal quelconque. Si* $\nu = 1$, *il existe une fonction* g *de* E^α P-*invariante, positive ou nulle sur* X *et strictement positive sur* K *si, et seulement si, on a* $\rho_K = 1$.

Preuve du lemme. – Si $\rho_K < 1$, on a montré plus haut que toute fonction P-invariante est identiquement nulle sur K. Supposons à présent que $\rho_K = 1$, et démontrons qu'il existe une fonction g P-invariante positive ou nulle et strictement positive sur K.

Puisque $\nu = 1$, on a $\sup_{n \geqq 1} \| P^n 1_X \|_\infty < +\infty$. Pour $n \geqq 1$ et $f \in E$, on pose

$$M_n f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k f.$$

Démontrons que, pour toute fonction f de E, la suite $\{ M_n f, n \geqq 1 \}$ converge uniformément vers une fonction continue P-invariante, que nous noterons πf. Il est clair que la suite d'opérateurs $\{ M_n, n \geqq 1 \}$ est uniformément bornée dans E. Soit $h \in E^\alpha$: la décomposition du théorème 2.1 permet d'écrire $h = h_1 + \cdots + h_p + f$ avec $h_i \in \operatorname{Ker}(P - \lambda_i)$, $|\lambda_i| = 1$, et $f \in F'$, où F' est un sous-espace de E^α stable par P tel que $P_{|F'}$ a un rayon spectral < 1. Si $\lambda_i \neq 1$, alors $M_n h_i = [(1 - \lambda_i^n)/n(1 - \lambda_i)] h_i$ et $\lim_{n \to +\infty} \| M_n h_i \|_\infty = 0$; si $\lambda_i = 1$ alors $M_n h_i = h_i$. Le fait que le rayon spectral de $P_{|F'}$ soit < 1 prouve bien la propriété annoncée pour $h \in E^\alpha$. On étend le résultat à E tout entier grâce à un argument classique de densité.

Passons à la construction de la fonction g. En vertu du théorème 2.1, P_K possède dans E_K^α une fonction invariante f_K positive ou nulle. Puisque K est minimal, f_K est strictement positive [$Z(f_K)$ est vide]. Considérons alors un prolongement f, $f \in E$, de f_K sur X ($f_{|K} = f_K$). Quitte à remplacer f par $|f|$, on peut choisir f positive sur X. La fonction $g = \pi f$ vérifie alors la propriété annoncée, car sa restriction à K coïncide avec f_K.

Montrons que g appartient à E^α. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions de E^α convergeant uniformément vers f : pour tout $n \geqq 1$, on a $\pi f_n \in N_1 =$

$\operatorname{Ker}(P-1) \cap E^{\alpha}$, d'où $g \in N_1$, car $\dim N_1 < \infty$ (*cf.* théorème 2.1). Le lemme est ainsi démontré.

Remarquons que si A est un compact absorbant disjoint de K, on peut choisir, d'après le théorème d'extension de Tietze [5], un prolongement f de f_K identiquement nul sur A. La fonction g définie ci-dessus admet dans ce cas une restriction à A identiquement nulle.

Démontrons que $2 \Rightarrow 3$. Il suffit évidemment de prouver que $n_c < +\infty$. Soit $A_1, \cdots, A_n$ n compacts absorbants minimaux disjoints. Pour tout $l \in \{1, \cdots, n\}$, nous désignons par f_l une fonction de E_{K_l} P_{K_l}-invariante, à valeurs strictement positives. D'après ce qui précède, il existe n fonctions $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in E^{\alpha}$ positives ou nulles, P-invariantes, et vérifiant $\gamma_{i|K_j} = \delta_{i,j} f_i$. La famille $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ est évidemment libre. Comme $\dim \operatorname{Ker}(P-1) \cap E^{\alpha} < +\infty$, on en déduit bien que n_c est fini.

Pour prouver enfin que $3 \Rightarrow 1$, reprenons la construction précédente avec $n = n_c$, $A_1 = K_1, \cdots, A_{n_c} = K_{n_c}$, et les fonctions $\gamma_1, \cdots, \gamma_{n_c}$ correspondantes. On pose

$$\gamma = \sum_{l=1}^{n_c} \gamma_l.$$

Le compact absorbant $Z(\gamma)$, qui admet une intersection vide avec chacun des ensembles $K_1, \cdots, K_{n_c}$, est nécessairement vide (par définition de n_c), d'où $\gamma > 0$. □

Pour prouver les théorèmes 2.3 et 2.4, nous supposons la condition 3 vérifiée, et conservons les notations ci-dessus (en particulier, on suppose toujours $\rho = 1$). On peut à ce stade utiliser l'opérateur relativisé $\tilde{P}$ de P et les résultats de [16], *voir* paragraphe 1. Nous allons cependant présenter une preuve complète de ces deux théorèmes, les arguments s'inspirant d'ailleurs très largement de [16].

Démonstration du théorème 2.3. – Commençons par prouver le

LEMME 2.6. – *Soit* K *un compact absorbant tel que* $\rho_K = 1$. *Alors, pour tout* $f \in E_K$ P_K*-invariante, les ensembles*

$$A = \{x \in K : f(x)/\gamma(x) = M\}$$

et

$$B = \{x \in K : f(x)/\gamma(x) = m\},$$

où l'on a posé $M = \sup_{y \in K} [f(y)/\gamma(y)]$ *et* $m = \inf_{y \in K} [f(y)/\gamma(y)]$, *forment des compacts absorbants contenus dans* K.

Preuve du lemme. – Pour tout $x \in \mathrm{K}$, on a $f(x) = \int_{\mathrm{K}} f(y)\,\eta(x, dy)$ et $\gamma(x) = \int_{\mathrm{K}} \gamma(y)\,\eta(x, dy)$. Si $x \in \mathrm{A}$ alors $f(x) = \mathrm{M}\gamma(x)$, d'où $\int_{\mathrm{K}} [\mathrm{M}\gamma(y) - f(y)]\,\eta(x, dy) = 0$. Il vient que tout point y du support de $\eta(x, \cdot)$ appartient à A. On raisonne de la même façon pour B. Le lemme est ainsi démontré.

Soient $l \in \{1, \cdots, n_c\}$, et g un élément de $\mathrm{E}_{\mathrm{K}_l}$ $\mathrm{P}_{\mathrm{K}_l}$-invariant. Prouvons que g est colinéaire à $\gamma_{l|\mathrm{K}_l}$: il existe un scalaire a pour lequel la fonction $\phi = \gamma_{l|\mathrm{K}_l} - ag$ s'annule en au moins un point de K_l. Les compacts absorbants A et B du lemme 2.6, appliqué avec $\mathrm{K} = \mathrm{K}_l$ et $f = \phi$, coïncident tous les deux avec K_l (car K_l est minimal), de sorte que ϕ est nulle, ce qui prouve la propriété annoncée.

Démontrons que la famille $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_{n_c}\}$, qui est libre, forme une base de Ker (P − 1). Étant donné une fonction h continue P-invariante, il existe pour tout $l \in \{1, \cdots, n_c\}$ un scalaire a_l tel que $h_{|\mathrm{K}_l} = a_l\,\gamma_{l\,|\,\mathrm{K}_l}$. Les compacts absorbants A et B du lemme 2.6, appliqué cette fois avec $\mathrm{K} = \mathrm{X}$ et $f = h - \sum_{l=1}^{m} a_l\,\gamma_l$, ont tous les deux une intersection non vide avec $\bigcup_{l=1}^{n_c} \mathrm{K}_l$ (par définition de n_c). On en déduit que f est identiquement nulle ; h s'écrit bien comme combinaison linéaire des γ_l. ☐

Démonstration du théorème 2.4. – Soit μ un élément quelconque de $\mathcal{M}$. Pour tout $f \in \mathrm{E}$ et tout $n \geqq 1$, on a

$$\mu(f) = \mu(\mathrm{M}_n f) = \mu(\pi f).$$

Les opérateurs M_n et π ont été définis dans la preuve du théorème 2.2. Rappelons que πf est P-invariante. Quitte à modifier les fonctions γ_l, on peut supposer l'existence, pour tout $l \in \{1, \cdots, n_c\}$, d'un élément $x_l \in \mathrm{K}_l$ pour lequel on a $\gamma_l(x_l) = 1$. Posant pour $l = 1, \cdots, n_c$,

$$\mu_l = \delta_{x_l} \circ \pi,$$

nous obtenons pour tout $f \in \mathrm{E}$, $\pi f = \sum_{l=1}^{n_c} \mu_l(f)\,\gamma_l$. Il est clair que chaque μ_l définit une mesure positive appartenant à $\mathcal{M}$, et que la famille $\{\mu_1, \cdots, \mu_{n_c}\}$ est libre. Par ailleurs, pour tout $f \in \mathrm{E}$, on a $\mu(f) = \sum_{l=1}^{n_c} \mu(\gamma_l)\,\mu_l(f)$, ce qui prouve finalement que la famille $(\mu_1, \cdots, \mu_{n_c})$ forme une base de $\mathcal{M}$. ☐

2.3.2. Cas où $\nu \geqq 2$

Nous supposons ici que $\rho = 1$ et $\nu \geqq 2$. Il n'existe donc pas de fonction $f > 0$ telle que $\mathrm{P}f = f$. Nous nous proposons de décrire l'espace $\mathcal{M}$ des mesures P-invariantes dans le cas où $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{P} - 1)^{\nu}$ contient une fonction continue strictement positive.

Pour simplifier les notations du théorème 2.1, nous posons pour tout $l \geqq 1$

$$\mathrm{N}_l = \mathrm{N}_l\,(1,\ \mathrm{P}) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{P} - 1)^l \cap \mathrm{E}^{\alpha}.$$

Existence d'une fonction g_0 strictement positive telle que $(\mathrm{P} - 1)^{\nu}\ g_0 = 0$.

Grâce au théorème 2.1, il existe une fonction γ à valeurs positives ou nulles telle que $\mathrm{P}\gamma = \gamma$. L'ensemble $\mathrm{K} = \mathrm{Z}\,(\gamma)$ des zéros de γ est un compact absorbant non vide. Nous obtenons alors le résultat suivant :

THÉORÈME 2.7. – *Il existe une fonction $g_0 \in \mathrm{E}^{\alpha}$ à valeurs strictement positives telle que $(\mathrm{P} - 1)^{\nu}\ g_0 = 0$ si, et seulement si, il existe $g_{\mathrm{K}} \in \mathrm{E}^{\alpha}_{\mathrm{K}}$, à valeurs strictement positives, telle que $(\mathrm{P}_{\mathrm{K}} - 1)^{\nu}\ g_{\mathrm{K}} = 0$, et si g_{K} admet un prolongement $g \in \mathrm{E}^{\alpha}$ sur* X.

Remarque. – Le théorème est valable avec n'importe quelle fonction $\gamma \geqq 0$ vérifiant $\mathrm{P}\gamma = \gamma$. En particulier si $\mathrm{K} = \mathrm{Z}\,(\gamma)$ est de cardinal fini, l'application P_{K} s'identifie à une matrice et il est facile de vérifier s'il existe ou non une fonction $g_{\mathrm{K}} > 0$ dans $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{P}_{\mathrm{K}} - 1)^{\nu}$, cette dernière admettant évidemment un prolongement $g \in \mathrm{E}^{\alpha}$.

Démonstration du théorème. – Le sens direct de l'équivalence est évident d'après (1). Pour montrer la réciproque, commençons par prouver qu'il existe une fonction h dans N_{ν}, dont la restriction à K coïncide avec g_{K}. Considérons pour cela les résolvantes R et R_{K}, respectivement de P sur E^{α}, et de P_{K} sur $\mathrm{E}^{\alpha}_{\mathrm{K}}$, puis les résidus Q et Q_{K} de R et R_{K} en 1. Notons qu'on a grâce à (1), pour toute fonction f de E^{α},

$$(\mathrm{Q}f)_{|\,\mathrm{K}} = \mathrm{Q}_{\mathrm{K}}\,(f_{|\,\mathrm{K}}).$$

D'après les résultats classiques de théorie spectrale (*cf.* [5]), nous avons $g_{\mathrm{K}} \in \mathrm{Im}\,\mathrm{Q}_{\mathrm{K}}$ et $\mathrm{Q}_{\mathrm{K}}^2 = \mathrm{Q}_{\mathrm{K}}$, d'où $\mathrm{Q}_{\mathrm{K}}\,g_{\mathrm{K}} = g_{\mathrm{K}}$. Soit $h = \mathrm{Q}\,g$. On a $h \in \mathrm{N}_{\nu}$ car $\mathrm{Im}\,\mathrm{Q} = \mathrm{N}_{\nu}$. De l'identité ci-dessus, il vient que $h_{|\,\mathrm{K}} = \mathrm{Q}_{\mathrm{K}}\,g_{\mathrm{K}} = g_{\mathrm{K}}$, ce qui prouve la propriété annoncée.

Démontrons maintenant, qu'à condition de choisir n assez grand, la fonction $g_0 = n\gamma + h$, qui appartient à N_{ν}, est strictement positive sur X. Pour cela, remarquons que la réunion des ouverts $\mathrm{O}_k = \{\, x \in \mathrm{X} : k\gamma\,(x) + h\,(x) > 0 \,\}$, quand k décrit $\mathbb{N}^*$, coïncide avec X, de sorte qu'on peut écrire X comme la réunion d'un nombre fini d'ouverts $\mathrm{O}_{k_1}, \cdots, \mathrm{O}_{k_p}$. Il suffit alors de prendre $n = \sup\,(k_1, \cdots, k_p)$. $\square$

Description des mesures P-*invariantes*

Nous supposons ici qu'il existe une fonction g_0 de E, strictement positive, vérifiant $(\mathrm{P}-1)^{\nu}\, g_0 = 0$ (*voir* th. précédent). Il existe alors un entier n, avec $1 \leqq n \leqq \nu - 1$, et n fonctions $g_1, \cdots, g_n$ appartenant respectivement à $\mathrm{N}_{i_1}, \cdots, \mathrm{N}_{i_{n-1}}, \mathrm{N}_1$, où $1 < i_{n-1} < \cdots < i_1$, tels que

$$\mathrm{P} g_i = g_i + g_{i+1} \quad \text{pour tout } i = 0, \cdots, n-1. \tag{2}$$

Posons $\mathrm{Z}_n = \mathrm{Z}(g_n)$, puis formellement, pour $i = n-1, \cdots, 1$,

$$\mathrm{Z}_i = \mathrm{Z}(g_{i|\mathrm{Z}_{i+1}}).$$

Nous notons n_1 le nombre maximal de compacts absorbants contenus dans Z_1. Nous allons montrer que n_1 est effectivement un nombre fini. Nous désignerons alors par $\mathrm{K}_1, \cdots, \mathrm{K}_{n_1}$ n_1 compacts absorbants minimaux disjoints inclus dans Z_1.

THÉORÈME 2.8. – *L'ensemble* Z_1 *est un compact absorbant non vide qui contient le support de tout élément non nul de* $\mathcal{M}$. *Le nombre* n_1 *est fini. L'espace* $\mathcal{M}$ *des mesures* P-*invariantes est de dimension* n_1 *et possède une base* $(\mu_1, \cdots, \mu_{n_1})$ *formée de mesures positives telles que le support de chaque* μ_i *soit contenu dans* K_i.

Démonstration. – Commençons par donner un sens aux ensembles Z_i. Grâce à (2), on obtient pour tout $k \geqq n$

$$\mathrm{P}^k\, g_0 = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_k^i\, g_i,$$

d'où $(\mathrm{C}_k^n)^{-1}\, \mathrm{P}^k\, g_0 = (\mathrm{C}_k^n)^{-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{C}_k^i\, g_i \right) + g_n$, et finalement $g_n = \lim_{k \to +\infty} (\mathrm{C}_k^n)^{-1}\, \mathrm{P}^k\, g_0$. La fonction g_n, qui est P-invariante, est donc positive, mais non strictement positive (car $\nu \neq 1$), de sorte que Z_n est un compact absorbant non vide. On a $\mathrm{P}_{\mathrm{Z}_n}^k\, (g_{0|\mathrm{Z}_n}) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{C}_k^i\, g_{i\,|\,\mathrm{Z}_n}$ pour tout $k \geqq n$. Comme précédemment, on en déduit que $g_{n-1\,|\,\mathrm{Z}_n}$, qui est $\mathrm{P}_{\mathrm{Z}_n}$-invariante d'après (2), est une fonction à valeurs positives, mais non strictement positives (car l'indice de la valeur propre 1 pour $\mathrm{P}_{\mathrm{Z}_n}$ est différent de 1). Par conséquent, l'ensemble $\mathrm{Z}_{n-1} = \mathrm{Z}(g_{n-1\,|\,\mathrm{Z}_n})$ est un compact absorbant non vide. On obtient de la même façon que Z_{n-2}, puis Z_{n-3}, etc., et finalement Z_1, forment des compacts absorbants non vide. Remarquons que $\mathrm{Z}_1 \subset \mathrm{Z}_n = \mathrm{Z}(g_n)$ avec $g_n \geqq 0$ et P-invariante.

Soit μ une mesure quelconque non nulle de $\mathcal{M}$, et A son support. De l'identité $\mathrm{P}g_{n-1} = g_{n-1} + g_n$, il vient que $\mu(g_n) = 0$, d'où $\mathrm{A} \subset \mathrm{Z}_n$. De la même façon, nous obtenons $\mu(g_{n-1}) = 0$, d'où $\mathrm{A} \subset \mathrm{Z}_{n-1}$, car g_{n-1} est positive sur Z_n. On prouve ainsi par récurrence que $\mathrm{A} \subset \mathrm{Z}_1$.

Notons $\mathcal{M}_1$ l'espace des mesures $\mathrm{P}_{\mathrm{Z}_1}$-invariantes. Il est clair que l'application S de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}_1$, donnée par $\mathrm{S}\mu(f_1) = \mu(f)$ où f est une fonction quelconque de E et f_1 sa restriction à Z_1, est définie et constitue un isomorphisme de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}_1$. Or on a $\mathrm{P}_{\mathrm{Z}_1}(g_{0\,|\,\mathrm{Z}_1}) = (\mathrm{P}g_0)_{|\,\mathrm{Z}_1} = g_{0\,|\,\mathrm{Z}_1}$. Comme $g_{0\,|\,\mathrm{Z}_1} > 0$, 1 est une valeur propre d'indice 1 pour $\mathrm{P}_{\mathrm{Z}_1}$. On peut par conséquent appliquer le théorème 2.2 avec $\mathrm{X} = \mathrm{Z}_1$ et $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathrm{Z}_1}$. En particulier désignant par π_1 l'opérateur défini comme π (*voir* dém. th. 2.2) mais avec $\mathrm{P}_{\mathrm{Z}_1}$ au lieu de P, on obtient finalement une base de $\mathcal{M}$ de la forme $\{\mathrm{S}^{-1} \circ \delta_{x_l} \circ \pi_1,\ l = 1, \cdots, n_1\}$, où $x_l \in \mathrm{K}_l$, ce qui achève la démonstration du théorème. $\square$

2.4. Exemple : noyaux hölderiens

Rappelons que α est un réel quelconque tel que $0 < \alpha \leqq 1$. Soit G un ensemble mesurable formé d'applications contractantes de X dans lui-même telles que, pour tout $x \in \mathrm{X}$, l'application ϕ_x définie de G dans X par $\phi_x(\sigma) = \sigma x$ soit mesurable. Soit en outre μ une mesure positive bornée sur G, et enfin q une application mesurable de $\mathrm{X} \times \mathrm{G}$ dans $\mathbb{R}^+$. On suppose que $\sup\limits_{x \in \mathrm{X}} \int_{\mathrm{G}} q(x, \sigma)\, \mu(d\sigma) < +\infty$ et que, pour tout $\sigma \in \mathrm{G}$, l'application q_σ définie sur X par $q_\sigma(x) = q(x, \sigma)$ appartient à E^α, avec en outre $\sup\limits_{\sigma \in \mathrm{G}} m_\alpha(q_\sigma) < +\infty$.

On considère l'opérateur P défini par

$$\mathrm{P}f(x) = \int_{\mathrm{G}} f(\sigma x)\, q(x, \sigma)\, \mu(d\sigma), \qquad x \in \mathrm{X}.$$

On montre dans [8] (pour $\alpha = 1$) que P est un opérateur borné sur E et quasi-compact sur E^α. La généralisation à $\alpha < 1$ est évidente. Nous en donnerons une démonstration dans le cadre des opérateurs de transfert (§ 3.2). Remarquons que P appartient bien à la famille d'opérateurs décrits précédemment. En effet, soit pour $x \in \mathrm{X}$ la mesure positive $\eta(x, \cdot)$ définie par

$$\eta(x, \mathrm{A}) = \int_{\phi_x^{-1}(\mathrm{A})} q(x, \sigma)\, \mu(d\sigma).$$

Alors $\mathrm{P}f(x) = \int_{\mathrm{X}} f(y)\,\eta(x,\, dy)$. L'exemple des opérateurs de transfert que nous décrivons ci-dessous est obtenu avec $\mathrm{X} = [0,\, 1]$, $\mathrm{G} = \{\mathrm{S}_0,\, \mathrm{S}_1\}$ où $\mathrm{S}_i\, x = \frac{x}{2} + \frac{i}{2}$.

3. APPLICATIONS AUX OPÉRATEURS DE TRANSFERT

Soit (X, *d*) un espace métrique compact, et Δ un homéomorphisme local de X dans lui-même, qui soit $n \to 1$ partout. Supposons en outre qu'il existe une constante $c > 1$ telle que $d(\Delta x,\, \Delta y) \geqq c d(x,\, y)$. Soit enfin une fonction *u* continue et à valeurs positives ou nulles sur X. Pour $x \in \mathrm{X}$ on définit la mesure positive $\eta(x,\, \cdot) = \sum_{y\,:\,\Delta y = x} u(y)\,\delta_y$. L'opérateur P associé à la famille $\{\eta(x,\, \cdot),\ x \in \mathrm{X}\}$ selon la formule du paragraphe 2 est l'opérateur de transfert classique donné par

$$\mathrm{P}f(x) = \sum_{y\,:\,\Delta y = x} u(y)\, f(y).$$

Nous nous proposons d'appliquer les résultats du paragraphe précédent à ce type d'opérateurs. Comme dans [4] nous avons choisi pour simplifier de faire l'étude dans le cadre dyadique classique ($\mathrm{X} = [0,\, 1]$, $\Delta x = 2x \mod (1)$), mais il est clair qu'elle s'étend à la situation générale décrite ci-dessus.

On conserve les notations du paragraphe précédent mais on considère ici $\mathrm{X} = [0,\, 1]$ muni de la distance usuelle $d(x,\, y) = |x - y|$. Ainsi on désigne encore par $(\mathrm{E},\, ||\cdot||_\infty)$ l'espace des fonctions continues sur $[0,\, 1]$ muni de la norme uniforme, et on note E^α l'espace des fonctions hölderiennes d'ordre α sur $[0,\, 1]$.

Soit α un réel tel que $0 < \alpha \leqq 1$. Dans toute la suite, nous désignerons par *u* une fonction de E^α à valeurs positives ou nulles, vérifiant pour tout $x \in [0,\, 1]$

$$u\left(\frac{x}{2}\right) + u\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) > 0. \tag{3}$$

Cette dernière hypothèse est cruciale pour la description des compacts invariants que nous présentons ci-dessous. On désigne par P_u l'opérateur défini sur E par

$$\mathrm{P}_u f(x) = u\left(\frac{x}{2}\right) f\left(\frac{x}{2}\right) + u\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) f\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right),$$

et on note ρ_u le rayon spectral de P_u.

3.1. Étude des compacts invariants

Compacts invariants pour u. Pour $i \in \{0, 1\}$, nous notons S_i la transformation affine de $\mathbb{R}$ définie par

$$S_i : x \to \frac{1}{2}(x+i).$$

Nous avons donné dans le paragraphe précédent une définition des compacts absorbants. Vu la forme particulière des $\eta(x, \cdot)$, nous obtenons de manière équivalente qu'un compact F de [0, 1] est absorbant si, pour tout $x \in \mathrm{F}$ et tout $\sigma \in \{S_0, S_1\}$ tels que $u(\sigma x) > 0$, on a $\sigma x \in \mathrm{F}$. Un tel ensemble F est encore appelé compact invariant [4]. Rappelons que F est minimal s'il n'existe pas de compact invariant non vide strictement inclus dans F. Pour mieux comprendre la définition ci-dessus, il peut être commode d'utiliser les notions de

Trajectoires, orbites, cycles et points périodiques. Pour $x \in [0, 1]$, nous appelons *trajectoire* de *x* tout sous-ensemble de [0, 1] de la forme $\{\sigma_n \cdots \sigma_1 x, n \geqq 1\}$ où $\{\sigma_n, n \geqq 1\}$ est une suite d'éléments de $\{S_0, S_1\}$ vérifiant $u(\sigma_n \cdots \sigma_1 x) \cdots u(\sigma_1 x) > 0$ pour tout $n \geqq 1$.

L'adhérence de l'ensemble des trajectoires de *x* est un compact de [0, 1] appelé *orbite* de *x*. Un compact F est invariant s'il contient les orbites de chacun de ses points. L'orbite d'un élément quelconque de [0, 1] est un exemple de compact invariant.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Nous dirons que $x \in [0, 1]$ est *un point périodique d'ordre p* s'il existe *p* éléments $\sigma_1, \cdots, \sigma_p$ de $\{S_0, S_1\}$ tels que $\sigma_p \cdots \sigma_1 x = x$, et si *p* est le plus petit entier pour lequel on a une telle relation. La famille $\{\sigma_1, \cdots, \sigma_p\}$ vérifiant la relation ci-dessus est unique. On pose

$$\mathcal{C}_x = \{\sigma_k \cdots \sigma_1 x, k = 1, \cdots, p\}.$$

Nous désignons par *cycle périodique d'ordre p* tout sous-ensemble fini C de [0, 1] de la forme $\mathcal{C}_x$, où *x* est un point périodique d'ordre *p*. On pose

$$i_{\mathrm{C}} = \prod_{k=1}^{p} u(\sigma_k \cdots \sigma_1 x).$$

Nous appelons « frère » de *x* l'élément $\tilde{x}$ de [0, 1], défini par $\tilde{x} = \left\{x + \frac{1}{2}\right\} = x + \frac{1}{2} - \left[x + \frac{1}{2}\right]$, c'est-à-dire par $\tilde{x} = x + \frac{1}{2}$, si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\tilde{x} = x - \frac{1}{2}$, si $x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$.

Notons qu'un cycle périodique C est invariant si on a $u(\tilde{y}) = 0$ pour chaque élément y de C, et minimal si son ordre est un nombre premier. Passons à la description des points périodiques :

LEMME 3.1. – *Les points périodiques d'ordre inférieur ou égal à un entier m sont de la forme $\frac{k}{2^p - 1}$, où $p \in \{1, \cdots, m\}$ et $k \in \{0, 1, \cdots, 2^p - 1\}$. En outre, un élément de* [0, 1] *et son frère ne peuvent être simultanément des points périodiques. Enfin, si x n'est pas périodique, les points de la forme $\sigma_n \cdots \sigma_1 x$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma_1, \cdots, \sigma_n \in \{S_0, S_1\}$, sont distincts deux à deux, et ne sont pas périodiques.*

Preuve du lemme. – Rappelons que tout élément x de [0, 1] se décompose de la manière suivante (décomposition dyadique)

$$x = \sum_{k \geqq 1} x_k \, 2^{-k},$$

où $(x_k)_{k \geqq 1}$ est une suite d'éléments de $\{0, 1\}$. Posant $x = (x_1, x_2, x_3, \cdots)$, il vient que $S_0 \, x = (0, x_1, x_2, \cdots)$ et $S_1 \, x = (1, x_1, x_2, \cdots)$.

Si x est un point périodique d'ordre inférieur ou égal à m, il existe par définition un entier p, $1 \leqq p \leqq m$, et p éléments $\sigma_1, \cdots, \sigma_p$ de $\{S_0, S_1\}$ tels que $\sigma_p \cdots \sigma_1 \, x = x$. Grâce à la décomposition dyadique de x, cette dernière égalité est équivalente à la propriété suivante

$$x_k = x_l, \qquad \forall k, \; l \geqq 1 \quad \text{tels que } k \equiv l \pmod{p}.$$

Il en résulte que $x = \sum_{k=1}^{p} x_k \, 2^{-k} + 2^{-p} \, x$, d'où $x = (2^p - 1)^{-1} \sum_{k=1}^{p} x_k \, 2^{p-k}$. Comme $x_k = \pm 1$, on en déduit bien la première propriété du lemme.

Pour prouver la seconde, considérons un point périodique $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, et démontrons par l'absurde que son frère $\tilde{x} = x + \frac{1}{2}$ n'est pas périodique : si $\tilde{x}$ était périodique, il existerait deux entiers p, $q \geqq 1$, puis $k \in \{0, 1, \cdots, 2^p - 1\}$ et $l \in \{0, 1, \cdots, 2^q - 1\}$, tels que $x = \frac{k}{2^p - 1}$ et $\tilde{x} = \frac{l}{2^q - 1}$, d'où $(2^q - 1)\,[2\,(k + 2^{p-1}) - 1] = 2l\,(2^p - 1)$, ce qui est impossible pour des raisons de parité. La démonstration pour $x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$ est identique.

Soit maintenant x un point de [0, 1] non périodique, et $A_x = \{\sigma_l \cdots \sigma_1 \, x, \; l \geqq 1, \; \sigma_1, \cdots, \sigma_l \in \{S_0, S_1\}\}$. La dernière assertion du lemme résulte de la propriété suivante : pour tout $y \in A_x$, il existe un unique entier $n \geqq 1$, et une unique famille $\{\sigma_1, \cdots, \sigma_n\}$ d'éléments de $\{S_0, S_1\}$ tels que $y = \sigma_n \cdots \sigma_1 x$. En effet, supposons qu'on ait, pour $1 \leqq k \leqq n$, à la fois $y = \sigma_n \cdots \sigma_1 x$ et $y = \tau_k \cdots \tau_1 x$, où les σ_i, $\tau_i \in \{S_0, S_1\}$. L'application Δ, définie de [0, 1] dans lui-même par $\Delta z = 2z \,(\mathrm{mod}\, 1)$, vérifie $\Delta S_o = \Delta S_1 = \mathrm{I}d_{[0,1]}$. Si $k < n$, nous en déduisons que $\sigma_{n-k} \cdots \sigma_1 x = x$, ce qui est impossible puisque x n'est pas périodique. Si $k = n$, nous devons prouver que les σ_i coïncident avec les τ_i. Cette propriété, évidente pour $n = 1$, s'établit aisément par récurrence grâce à Δ. Le lemme est ainsi démontré. □

Par hypothèse, la fonction w, définie par

$$w(x) = u\left(\frac{x}{2}\right) + u\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right),$$

est à valeurs strictement positives. Les fonctions u et $v = u/w$ admettent les mêmes zéros, et donc les mêmes compacts invariants. Puisque v vérifie $v\left(\frac{x}{2}\right) + v\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) = 1$ pour tout $x \in [0, 1]$, on peut utiliser les résultats établis dans [4] pour décrire les compacts invariants pour u :

PROPOSITION 3.2. – *Tout compact invariant contient au moins un cycle périodique. Le nombre maximal de compacts invariants disjoints est fini. Tout compact invariant fini est une réunion de cycles périodiques invariants.*

Hypothèse (Z). Nous dirons que u vérifie la propriété (Z) si, pour tout ε, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, l'intervalle $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ ne contient qu'un nombre fini de zéros de u.

Sous l'hypothèse (Z), aucun point de [0, 1], excepté éventuellement 0 ou 1, n'est un point d'accumulation de zéros de u. En particulier, (Z) est satisfaite si u admet un nombre fini de zéros, cette dernière condition étant nécessaire et suffisante si $u(0)$ et $u(1)$ sont non nuls. Sous l'hypothèse (Z), nous disposons du résultat suivant :

PROPOSITION 3.3. – *Tout compact invariant infini contient* 0. *Le nombre maximal de compacts invariants disjoints est égal à* 1, *si u ne possède pas de cycle périodique invariant, et au nombre de cycles périodiques invariants disjoints sinon. En outre, si* γ *est une fonction de* E, *positive ou nulle, vérifiant* $P_u \gamma = \beta\gamma$, *où* $\beta > 0$, *alors* $Z(\gamma)$ *est, ou bien vide, ou bien une réunion finie de cycles périodiques invariants.*

Démonstration. – Pour simplifier, nous donnons la preuve dans le cas où u admet un nombre fini de zéros. La démonstration s'étend à l'hypothèse (Z) sans difficulté. Commençons par établir le

LEMME 3.4. – *L'orbite de* $\frac{1}{2}$ *est l'ensemble* [0, 1] *tout entier.*

Preuve du lemme. – Il est clair que l'ensemble

$$A = \{ \sigma_n \cdots \sigma_1 \frac{1}{2}, n \geqq 1, \sigma_1, \cdots, \sigma_n \in \{ S_0, S_1 \} \}$$

coïncide avec l'ensemble des dyadiques, privé de 0, 1 et $\frac{1}{2}$, qui est dense dans [0, 1]. Il suffit donc de prouver que l'orbite de $\frac{1}{2}$ contient l'ensemble A :

Soit $y = \sigma_n \cdots \sigma_1 \frac{1}{2}$ un élément quelconque de A. Pour chaque entier $l = 1, \cdots, n$, nous posons $y_l = \sigma_l \cdots \sigma_1 \frac{1}{2}$. Nous désignons par I le sous-ensemble de $\{ 1, \cdots, n \}$ composé des indices *i* pour lesquels $u(y_i) = 0$, et par J le complémentaire de I dans $\{ 1, \cdots, n \}$. Comme *u* est continue et n'admet qu'un nombre fini de zéros, il existe un réel $a > 0$ tel que l'on ait, pour tout $j \in J$, $u(z) > 0$ quand $| z - y_j | < a$, puis, pour tout $i \in I$, $] y_i - a, y_i + a [\cap Z(u) = \{ y_i \}$, où Z (*u*) est l'ensemble des zéros de *u*.

Soit ε, $0 < \varepsilon < a$. Nous devons prouver qu'il existe un élément *b* dans l'une des trajectoires de $\frac{1}{2}$ vérifiant $| y - b | \leqq \varepsilon$. Or, on montre aisément qu'il existe un élément x_0 dans l'une des trajectoires de $\frac{1}{2}$ vérifiant $0 < x_0 \leqq \varepsilon$. On pose alors $x = \frac{x_0}{2} + \frac{1}{2}$, puis $x_l = \sigma_l \cdots \sigma_1 x$ pour $l = 1, \cdots, n$. On a $x_l \neq y_l$ et $| x_l - y_l | \leqq 2^{-(l+1)} \varepsilon$, d'où, par définition de a, $u(x_l) > 0$, ce qui prouve la propriété annoncée (avec $b = x_n$) et finalement le lemme.

Nous démontrons maintenant la proposition. Soit K un compact invariant infini ne contenant pas 0. On a $m = \inf K > 0$. Par ailleurs, il existe une famille infinie $(a_n^0)_{n \geqq 1}$ d'éléments de K telle que $u\left(\frac{a_n^0}{2}\right) \neq 0$ pour tout $n \geqq 1$, de sorte que la famille $\left(\frac{a_n^0}{2}\right)_{n \geqq 1}$ est contenue dans K. On peut à nouveau extraire de $\left(\frac{a_n^0}{2}\right)_{n \geqq 1}$ une sous-suite $(a_n^1)_{n \geqq 1}$ telle que l'on ait $u\left(\frac{a_n^1}{2}\right) \neq 0$, et donc $\frac{a_n^1}{2} \in K$, pour tout $n \geqq 1$. Réitérant ce procédé, on obtient, pour chaque $p \geqq 1$, une famille $(a_n^p)_{n \geqq 1}$ d'éléments de K vérifiant $a_n^p \leqq 2^{-p}$ M, où M = sup K, et donc, pour *p* assez grand, $a_n^p < m$, ce qui est absurde. Nous avons finalement prouvé que tout compact invariant infini contient 0.

Utilisons cette dernière propriété et le lemme ci-dessus pour déterminer le nombre maximal de compacts invariants disjoints : s'il n'existe pas de cycle périodique invariant, alors tous les compacts invariants sont infinis et contiennent donc 0, et finalement $\frac{1}{2}$, car $u\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ (sinon $\{0\}$ serait invariant). On déduit du lemme ci-dessus que $n_c = 1$. Supposons maintenant qu'il existe n cycles périodiques invariants disjoints. Si $u\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, alors $\{0\}$ et $\{1\}$ sont invariants. On déduit à nouveau de la première propriété de la proposition que $n_c = n$. Si au contraire $\{0\}$ et $\{1\}$ ne sont pas invariants, alors tout compact invariant infini contient $\frac{1}{2}$, et par conséquent coïncide avec [0, 1], d'où $n_c = n$.

Pour démontrer la dernière propriété de la proposition, nous procédons par l'absurde en supposant que γ s'annule en un point x n'appartenant à aucun cycle périodique invariant. On en déduit alors qu'il existe une suite $(x_n)_{n \geqq 1}$ d'éléments de l'une des trajectoires de x, convergeant vers 0 et telle que $\gamma(x_n) = 0$ pour tout $n \geqq 1$. En outre, il existe un réel $\delta > 0$ tel que $\left]\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}+\delta\right[- \left\{\frac{1}{2}\right\}$ ne contienne aucun zéro de u. Or, on a

$$\gamma(x_n) = \beta\left[u\left(\frac{x_n}{2}\right)\gamma\left(\frac{x_n}{2}\right)+u\left(\frac{x_n}{2}+\frac{1}{2}\right)\gamma\left(\frac{x_n}{2}+\frac{1}{2}\right)\right] = 0,$$

d'où, pour n suffisamment grand, $\gamma\left(\frac{x_n}{2}+\frac{1}{2}\right) = 0$, et par continuité, $\gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Par conséquent, γ s'annule sur l'orbite de $\frac{1}{2}$, donc sur [0, 1] tout entier en vertu du lemme 3.4, ce qui est absurde. La proposition est ainsi démontrée. □

Nous concluons cette étude par quelques propriétés très simples sur l'opérateur P_C où C est un cycle périodique invariant.

PROPOSITION 3.5. – *Si* C *est un cycle périodique invariant d'ordre p,* P_C *s'identifie à une matrice carrée positive d'ordre p, l'espace* Ker $(P_C - \rho_C)$ *est engendré par un élément de* E_C *à valeurs strictement positives, et l'on a*

$$\rho_C = (i_C)^{\frac{1}{p}}.$$

Preuve. – L'ensemble C est de la forme C_x, où x est un point périodique d'ordre p. Considérant $\sigma_1, \cdots, \sigma_p \in \{S_0, S_1\}$ tels que $\sigma_p \cdots \sigma_1 x = x$, et notant $x_l = \sigma_l \cdots \sigma_1 x$, pour $l \in \{1, \cdots, p\}$, on obtient que $P_C f(x_l) = u(x_{l+1}) f(x_{l+1})$, pour $l = 1, \cdots, p-1$, et $P_C f(x_p) = u(x_1) f(x_1)$. On en déduit la formule sur ρ_C.

Soit $f \in \operatorname{Ker}(\mathrm{P_C} - \rho_\mathrm{C})$. Si f s'annule en un point x_l, alors f est identiquement nulle. Sinon f est ou bien à valeurs strictement positives, ou bien à valeurs strictement négatives. En particulier il existe une fonction $\gamma > 0$ dans $\operatorname{Ker}(\mathrm{P_C}-\rho_\mathrm{C})$. Soit $l \in \{1, \cdots, p\}$ et $a \in \mathbb{C}$ tels que $(f - a\gamma)(x_l) = 0$. Comme $(f - a\gamma) \in \operatorname{Ker}(\mathrm{P_C} - \rho_\mathrm{C})$, il vient que $f = a\gamma$.

3.2. Description de $\operatorname{Ker}(\mathrm{P}_u - \rho_u)^\nu$ et de $\mathcal{M}$

Commençons par prouver que

PROPOSITION 3.6. – P_u *est quasi-compact sur* E^α.

Démonstration. – Par récurrence, on obtient facilement, pour chaque entier $n \geqq 1$, toute fonction $f \in \mathrm{E}$ et $x \in [0, 1]$,

$$\mathrm{P}_u^n f(x) = \sum_{\sigma_1, \cdots, \sigma_n \in \{\mathrm{S}_0, \mathrm{S}_1\}} u(\sigma_1 x) \cdots u(\sigma_n \cdots \sigma_1 x) f(\sigma_n \cdots \sigma_1 x).$$

Pour $f \in \mathrm{E}^\alpha$, nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_u^n f(x) - \mathrm{P}_u^n f(y) = &\sum_{\sigma_1, \cdots, \sigma_n \in \{\mathrm{S}_0, \mathrm{S}_1\}} u(\sigma_1 x) \cdots u(\sigma_n \cdots \sigma_1 x)\\ &\times [f(\sigma_n \cdots \sigma_1 x) - f(\sigma_n \cdots \sigma_1 y)]\\ &+ \sum_{\sigma_1, \cdots, \sigma_n \in \{\mathrm{S}_0, \mathrm{S}_1\}} f(\sigma_n \cdots \sigma_1 y)\\ &\times [u(\sigma_1 x) \cdots u(\sigma_n \cdots \sigma_1 x)\\ &- u(\sigma_1 y) \cdots u(\sigma_n \cdots \sigma_1 y)].\end{aligned}$$

Puisque les fonctions $x \to u(\sigma_1 x) \cdots u(\sigma_n \cdots \sigma_1 x)$ appartiennent à E^α, nous obtenons

$$\begin{aligned}|\mathrm{P}_u^n f(x) - \mathrm{P}_u^n f(y)| \leqq\ & 2^{-n\alpha} \|\mathrm{P}_u^n 1\|_\infty m_\alpha(f) |x - y|^\alpha\\ &+ c_n \|f\|_\infty |x - y|^\alpha,\end{aligned}$$

d'où,

$$|||\mathrm{P}_u^n f|||_\alpha \leqq 2^{-n\alpha} \|\mathrm{P}_u^n 1\|_\infty |||f|||_\alpha + \mathrm{R}_n \|f\|_\infty, \tag{4}$$

où R_n est une constante positive ne dépendant que de n et u. La norme $|||\ \ |||_\alpha$ a été définie dans le paragraphe 2.

Remarquons que $\lim\limits_{n\to+\infty} [2^{-n\alpha} \, || \, \mathrm{P}_u^n \, 1 \, ||_\infty]^{1/n} = 2^{-\alpha} \, \rho_u$, où ρ_u est le rayon spectral de P_u. Par ailleurs, l'inégalité ci-dessus, appliquée avec $n = 1$, et le théorème d'Ascoli, prouvent que P_u est compact de $(\mathrm{E}^\alpha, \, ||| \cdot |||)$ dans $(\mathrm{E}^\alpha, \, || \cdot ||_\infty)$. On déduit de la propriété rappelée dans le paragraphe 1 que P_u est quasi-compact sur E^α. □

Nous notons ν l'indice de ρ_u. Les théorèmes du paragraphe 2 s'appliquent directement à P_u, la seule différence importante étant que le nombre maximal n_c de compacts invariants disjoints est ici toujours fini. Cependant il peut être difficile de calculer ce nombre. C'est pourquoi nous supposerons les conditions (Z) et (3) vérifiées dans toute la suite. Voici une première propriété qui résulte directement de la proposition 3.3. :

Si u vérifie (Z), (3), et ne possède pas de cycle périodique invariant, alors la fonction propre γ, positive ou nulle, associée à ρ_u pour P_u (dont l'existence est assurée par le théorème 2.1) est strictement positive. Dans ce cas, on a donc nécessairement $\nu = 1$.

Les théorèmes suivants découlent du paragraphe 2 et de l'étude des compacts invariants :

THÉORÈME 3.7. – *Cas* $\nu = 1$. *Sous les hypothèses* (3) *et* (Z),

1. *s'il n'existe pas de cycle périodique invariant, alors* $\nu = 1$, *l'espace des fonctions continues solutions de* $\mathrm{P}_u f = \rho_u f$ *est engendré par une fonction* γ *de* E^α *strictement positive, et, si* $\rho_u = 1$, *l'espace* $\mathcal{M}$ *des mesures* P_u*-invariantes est engendré par la mesure positive* μ *définie par*

$$\mu(f) = \gamma(0)^{-1} \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{P}_u^k f(0) \right).$$

2. *Sinon, soient* $\mathrm{C}_1, \cdots, \mathrm{C}_{n_c}$ *les* n_c *cycles périodiques invariants minimaux disjoints, et* $p_1, \cdots, p_{n_c}$ *leur ordre respectif. Il existe une fonction* $\gamma \in \mathrm{E}^\alpha$ *strictement positive telle que* $\mathrm{P}_u \gamma = \rho_u \gamma$ *si, et seulement si, on a* $\nu = 1$ *et* $i_{\mathrm{C}_l} = \rho_u$ *pour tout* $l = 1, \cdots, n_c$. *Sous cette dernière condition, l'espace des fonctions continues solutions de* $\mathrm{P}_u f = \rho_u f$ *admet une base* $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_{n_c}\}$ *de fonctions de* E^α *telles que* $\gamma_{i\,|\mathrm{C}_j} \equiv 0$ *si* $i \neq j$. *Si en outre* $\rho_u = 1$, *la famille* $\{\mu_l = 1/p_l \sum_{y \in \mathrm{C}_l} \gamma(y)^{-1} \delta_y, \; l = 1, \cdots, n_c\}$ *forme une base de* $\mathcal{M}$.

Remarque. – On montre aisément que les mesures μ_l ci-dessus sont P_u-invariantes. La dernière assertion du théorème 3.7 résulte donc de la propriété $\dim \mathcal{M} = n_c$ démontrée dans le théorème 2.4.

Passons à l'étude du cas $\nu \geqq 2$. Nous supposons ici que $\rho_u = 1$. Soit γ une fonction P_u-invariante à valeurs positives ou nulles, et $K = Z(\gamma)$ l'ensemble des zéros de γ. On sait que K est un compact invariant non vide, de cardinal fini d'après la proposition 3.3. Il s'écrit donc comme la réunion disjointe de m cycles périodiques invariants $A_1, \cdots, A_m$.

On a montré dans le paragraphe 2 qu'une condition nécessaire pour qu'il existe $g_0 > 0$ vérifiant $(P_u - 1)^\nu g_0 = 0$ est que $\rho_B = 1$ pour tout compact invariant B. Par conséquent, en vertu du théorème 2.7 et de la proposition 3.5, on obtient la

PROPOSITION 3.8. – *Sous les hypothèses* (Z), (3), $\rho_u = 1$, *les trois propriétés suivantes sont équivalentes* :

1. *Il existe* $g_0 \in E^\alpha$ *à valeurs strictement positives telle que* $(P_u - 1)^\nu g_0 = 0$.
2. *On a* $i_{A_l} = 1$ *pour chaque* $l \in \{1, \cdots, m\}$.
3. *On a* $i_C = 1$ *pour tout cycle périodique invariant* C.

Supposons maintenant qu'il existe une fonction g_0 satisfaisant à la condition 1 ci-dessus, et considérons le compact invariant Z_1 associé selon la méthode du paragraphe 2.3.2. Rappelons que $Z_1 \subset Z(g_n)$ avec $g_n \geqq 0$ P_u-invariante. D'après la proposition 3.3, Z_1 est donc de cardinal fini.

Soit n_1 le nombre maximal de cycles périodiques invariants minimaux disjoints contenus dans Z_1, et $C_1, \cdots, C_{n_1}$ de tels cycles périodiques invariants d'ordre respectif $p_1, \cdots, p_{n_1}$. Le théorème 2.8 assure que toute mesure P_u-invariante a son support inclus dans Z_1, que l'espace $\mathcal{M}$ des mesures P_u-invariantes est de dimension n_1, $\mathcal{M}$ étant canoniquement isomorphe à l'espace $\mathcal{M}_1$ des mesures P_{Z_1}-invariantes.

Rappelons que $P_{Z_1}(g_{0|Z_1}) = g_{0|Z_1}$. Soit $l \in \{1, \cdots, n_1\}$ quelconque. On vérifie aisément que la mesure $\mu_l^1 = 1/p_l \sum_{y \in C_l} g_0(y)^{-1} \delta_y$ est P_{Z_1}-invariante (on peut d'ailleurs, pour retrouver cette propriété, appliquer le théorème 3.7 en remplaçant [0, 1] par Z_1 et la fonction γ par $g_{0|Z_1}$). On en déduit le

THÉORÈME 3.9. – *Si u vérifie* (Z), (3), $\rho_u = 1$, *et sous l'une quelconques des trois conditions de la proposition précédente, l'espace* $\mathcal{M}$ *des mesures* P_u*-invariantes est de dimension* n_1 *et admet pour base la famille* $\{\mu_l = 1/p_l \sum_{y \in C_l} g_0(y)^{-1} \delta_y,\ l = 1, \cdots, n_1\}$.

Nous présentons maintenant un cas particulier où l'étude spectrale de P_u se ramène à un calcul matriciel explicite.

3.3. Cas où u est un polynôme trigonométrique et exemples

Nous supposons ici que la fonction u est un polynôme trigonométrique positif ou nul sur [0, 1]. Il est donc de la forme

$$u(x) = \sum_{k=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} a_k\, e^{2i\pi kx}.$$

Tout polynôme trigonométrique $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k\, e^{2i\pi kx}$ s'écrit de la manière suivante

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{2k}\, e^{2i\pi 2kx} + e^{2i\pi x} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{2k+1}\, e^{2i\pi 2kx} \\ &= f_0(2x) + e^{2i\pi x} f_1(2x). \end{aligned}$$

En particulier, on a $u(x) = u_0(2x) + e^{2i\pi x} u_1(2x)$, et un calcul évident montre que

$$\mathrm{P}_u f(x) = 2\,[u_0(x) f_0(x) + e^{2i\pi x} u_1(x) f_1(x)].$$

Dans la suite, nous désignerons par $\mathcal{T}_l$, $l \geqq 0$, l'espace engendré par la famille $\{ e^{2i\pi kx},\ k = -l, \cdots, l \}$. Pour des raisons évidentes de degré, P_u opère sur $\mathcal{T}_\mathrm{N}$, et il existe, pour tout polynôme trigonométrique f, un entier $n_0 \geqq 1$ tel que $\mathrm{P}_u^n f \in \mathcal{T}_\mathrm{N}$ pour tout entier $n \geqq n_0$.

Nous désignerons par P_N la restriction de P_u à $\mathcal{T}_\mathrm{N}$. Celle-ci s'identifie à une matrice carrée d'ordre $2\mathrm{N}+1$. Si les coefficients de u sont réels, P_u opère sur l'espace $\tilde{\mathcal{T}}_\mathrm{N}$ engendré par $\{ 1, \cos 2\pi x, \cdots, \cos 2\pi \mathrm{N} x \}$. Les résultats établis ci-dessous restent alors valables quand on remplace $\mathcal{T}_\mathrm{N}$ par $\tilde{\mathcal{T}}_\mathrm{N}$, et P_N par $\tilde{\mathrm{P}}_\mathrm{N} = \mathrm{P}_{u \mid \tilde{\mathcal{T}}_\mathrm{N}}$.

Nous noterons ρ_N la plus grande valeur propre positive de P_N, et ν_N l'indice de ρ_N pour P_N. Soit maintenant α un réel tel que $0 < \alpha \leqq 1$. On a évidemment $u \in \mathrm{E}^\alpha$. On désigne par ρ_u le rayon spectral de P_u sur E, et par ν son indice sur E^α. Nous avons alors le résultat suivant :

PROPOSITION 3.10. – *On a* $\rho_\mathrm{N} = \rho_u$, *et* $\nu_\mathrm{N} \leqq \nu$. *En outre,* $\nu = 1$ *si, et seulement si,* $\nu_\mathrm{N} = 1$. *Si cette dernière condition est vérifiée, toute fonction continue,* 1*-périodique, vérifiant* $\mathrm{P}_u f = \rho_u f$, *appartient à* $\mathcal{T}_\mathrm{N}$.

Démonstration. – Comme $1 \in \mathcal{T}_\mathrm{N}$, on a $\rho_\mathrm{N} = \rho_u$. La quasi-compacité de P_N est évidente car $\mathcal{T}_\mathrm{N}$ est de dimension finie. La description spectrale du théorème 2.1 s'applique donc à P_N. En particulier, les valeurs propres pour P_N de module ρ_N ont un indice inférieur ou égal à celui de ρ_N.

L'inégalité $\nu_\mathrm{N} \leqq \nu$ est évidente. De même, si $\nu = 1$, alors $\nu_\mathrm{N} = 1$. Réciproquement, si $\nu_\mathrm{N} = 1$, on a $\sup_{n \geq 1} \rho_u^{-n} \| \mathrm{P}_u^n 1 \|_\infty = \sup_{n \geq 1} \rho_\mathrm{N}^{-n} \| \mathrm{P}_\mathrm{N}^n 1 \|_\infty < \infty$, d'où $\nu = 1$. Le dernier point de la proposition s'établit grâce à un argument classique de densité : soit f une fonction 1-périodique, continue, vérifiant $\mathrm{P}_u f = \rho_u f$. Soit en outre $\varepsilon > 0$ quelconque, et g un polynôme trigonométrique tel que $\| f - g \|_\infty \leqq \varepsilon$. On a

$$\| f - \rho_u^{-n} \mathrm{P}_u^n g \|_\infty = \| \rho_u^{-n} \mathrm{P}_u^n (f - g) \|_\infty \leqq c \| f - g \|_\infty .$$

Or, d'après une remarque ci-dessus, pour n assez grand, nous avons $\rho_u^{-n} \mathrm{P}_u^n g \in \mathcal{T}_\mathrm{N}$. Comme $\mathcal{T}_\mathrm{N}$ est fermé, car de dimension finie, on en déduit que $f \in \mathcal{T}_\mathrm{N}$. $\square$

Afin d'illustrer les résultats précédents, nous présentons deux familles d'exemples très simples.

Exemple 1. – Pour tout $a \geqq 0$, nous posons

$$u_a (x) = \cos^2 \pi x + a \sin^2 2\pi x .$$

Nous notons ρ_a le rayon spectral de P_{u_a} sur E, et ν_a son indice sur E^α. La fonction u_a admet $\{ 0 \}$ et $\{ 1 \}$ comme uniques cycles périodiques invariants. L'opérateur P_{u_a} opère sur $\tilde{\mathcal{T}}_2$ et s'identifie sur cet espace à la matrice

$$\tilde{\mathrm{P}}_a = \begin{pmatrix} 1 + a & \dfrac{1}{2} & \dfrac{-a}{2} \\ -a & \dfrac{1}{2} & 1 + a \\ 0 & 0 & \dfrac{-a}{2} \end{pmatrix} .$$

De la proposition ci-dessus, et grâce à des calculs matriciels simples, nous obtenons la description suivante :

• Si $a < \dfrac{1}{2}$, alors $\rho_a = 1$, $\nu_a = 1$. L'espace des fonctions continues 1-périodiques P_{u_a}-invariantes, que l'on détermine complètement à l'aide de $\tilde{\mathrm{P}}_a$, est engendré par le polynôme trigonométrique $\gamma_a (x) = 1 - 2a \cos 2\pi x$, qui est à valeurs strictement positives. L'espace des fonctions continues solutions de l'équation $\mathrm{P}_{u_a} f = f$ et l'espace $\mathcal{M}$ des mesures P_{u_a}-invariantes sont de dimension égale à 2, la famille $\{ \delta_0, \delta_1 \}$ formant une base de $\mathcal{M}$.

• Si $a = \dfrac{1}{2}$, alors $\rho_a = 1$ et $\nu_a \geqq 2$. La fonction positive $\gamma_{\frac{1}{2}}$ est P_{u_a}-invariante, mais s'annule en 0 et 1. Comme on a $\mathrm{Z} (\gamma_{\frac{1}{2}}) = \{ 0, 1 \}$ et $i_{\{ 0 \}} = i_{\{ 1 \}} = 1$, il existe une fonction strictement positive dans $\operatorname{Ker} (\mathrm{P}_{u_a} - 1)^\nu \cap \mathrm{E}^\alpha$. Plus précisément, un calcul direct montre que $1 \in \operatorname{Ker} (\tilde{\mathrm{P}}_{\frac{1}{2}} - 1)^2$, puis que $\mathrm{P}_{u_{\frac{1}{2}}} 1 = \tilde{\mathrm{P}}_{\frac{1}{2}} 1 = 1 + \dfrac{1}{2} \gamma_{\frac{1}{2}}$. On déduit alors du théorème 3.9. que $\{ \delta_0, \delta_1 \}$ forme une base de $\mathcal{M}$.

• Si $a > \frac{1}{2}$, alors $\rho_a = \frac{1}{2} + a$, $\nu_a = 1$, et l'espace des fonctions continues 1-périodiques vérifiant $P_{u_a} f = \rho_a f$ est engendré par $\gamma_{\frac{1}{2}}$. Les fonctions continues solutions de l'équation $P_{u_a} f = \rho_a f$ s'annulent toutes en 0 et 1, et forment un espace de dimension égale à 2.

Exemple 2. – Pour tout $b \geqq 0$, nous posons

$$u_b(x) = \cos^2 3\pi x + b \sin^2 6\pi x.$$

Nous notons ρ_b le rayon spectral de P_{u_b} sur E, et ν_b son indice sur E^α. La fonction u_b admet $\{0\}$, $\{1\}$, et $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$ comme uniques cycles périodiques invariants. L'opérateur P_{u_b} laisse invariant $\tilde{\mathcal{T}}_6$, et s'identifie sur cet espace à la matrice

$$\tilde{P}_b = \begin{pmatrix} b+1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{b}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & b+1 & 0 & -\frac{b}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{b}{2} & 0 & b+1 & 0 & b+1 \\ -b & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b}{2} \end{pmatrix}$$

Comme précédemment on obtient la description suivante :

• Si $b < \frac{1}{2}$, alors $\rho_b = 1$, $\nu_b = 1$. L'espace des fonctions continues 1-périodiques P_{u_b}-invariantes est de dimension égale à 2, et contient le polynôme trigonométrique $\gamma_b(x) = 1 - 2b \cos 6\pi x$, qui est à valeurs strictement positives. L'espace des fonctions continues solutions de l'équation $P_{u_b} f = f$ et l'espace $\mathcal{M}$ des mesures P_{u_b}-invariantes sont de dimension égale à 3, la famille $\left\{\delta_0, \delta_1, \frac{1}{2}\left(\delta_{\frac{1}{3}} + \delta_{\frac{2}{3}}\right)\right\}$ formant une base de $\mathcal{M}$.

• Si $b = \frac{1}{2}$, alors $\rho_b = 1$ et $\nu_b \geqq 2$. L'espace des fonctions continues, 1-périodiques, P_{u_b}-invariantes, est de dimension supérieure ou égale à 2, et contient la fonction positive $\gamma_{1/2}$, qui s'annule en 0, 1, $\frac{1}{3}$, et $\frac{2}{3}$. La famille $\left\{\delta_0, \delta_1, \frac{1}{2}\left(\delta_{\frac{1}{3}} + \delta_{\frac{2}{3}}\right)\right\}$ forme une base de $\mathcal{M}$.

• Si $b > \frac{1}{2}$, alors $\rho_b = \frac{1}{2} + b$ et $\nu_b = 1$. Les fonctions continues solutions de l'équation $\mathrm{P}_{u_b} f = \rho_b f$ s'annulent toutes en 0, 1, $\frac{1}{3}$, et $\frac{2}{3}$, et forment un espace de dimension égale à 3.

RÉFÉRENCES

[1] R. BOWEN, Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms, *Lectures Notes in Mathematics,* Vol. **470**, Springer-Verlag, Heidelberg, New York.

[2] A. COHEN, I. DAUBECHIES et J. C. FEAUVEAU, Biorthogonal Bases of Compactly Supported Wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. **XLV**, 1992, p. 485-560.

[3] J.-P. CONZE, *Sur la régularité des solutions d'une équation fonctionnelle*. Preprint, juin 1989, Laboratoire de Probabilités, Université de Rennes I.

[4] J.-P. CONZE et A. RAUGI, Fonctions harmoniques pour un opérateur de transition et applications, *Bull. Soc. Math. France*, Vol. **118**, 1990, p. 273-310.

[5] N. DUNFORD et J.-T. SCHWARTZ, Linear operator, Part. I, *Pure and Applied Mathematics*, Vol. **VII**, Interscience.

[6] Y. GUIVARC'H, *Marches aléatoires sur les groupes et problèmes connexes*, Preprint, Laboratoire de Probabilités, Université de Rennes I.

[7] Y. GUIVARC'H et A. RAUGI, Products of random matrices and convergence theorems, *Contempory Math.*, Vol. **50**, A.M.S., 1986, p. 31-54.

[8] H. HENNION, Sur un théorème spectral et son application aux noyaux lipchitziens, *Proceeding of the A.M.S.,* Vol. **118**, 2, 1993, p. 627-634.

[9] L. HERVÉ, Régularité et conditions de bases de Riesz pour les fonctions d'échelle, *C. R. Acad. Sci. Paris*, T. **315**, Série I, 1992, p. 1029-1032.

[10] L. HERVÉ, *Multi-resolution Analysis of multiplicity d. Applications to dyadic interpolation*, à paraître dans *Applied and Computational Harmonic Analysis*.

[11] C. T. IONESCU-TULCÉA et G. MARINESCU, Théorie ergodique pour une classe d'opérations non complétement continues, *Annals of Math.*, T. **52**, 1950, p. 140-147.

[12] B. JAMISON, Asymptotic behaviour of successive iterates of continuous functions under a Markov operator, *J. of Math., Analysis and Applications*, T. **9**, 1964, p. 303-314.

[13] G. KELLER, Markov extensions, Zeta functions, and Fredholm theory for piece-wise invertible dynamical systems, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. **314**, 2, 1989.

[14] E. LE PAGE, Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires, Dans « Probability measures on groups », ed. H. Heyer, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. **928**, Springer-Verlag, Heidelberg, New York.

[15] J. NEVEU, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson, Paris.

[16] M.-F. NORMAN, *Markov processes and learning models*, Academic Press, 1972.

[17] W. PARRY et M. POLLICOTT, *Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics*, Astérisque 187-188, 1990.

[18] A. RAUGI, Théorie spectrale d'un opérateur de transitions sur un espace compact, *Ann. Inst. Henri Poincaré,* Vol. **28**, 2, 1992, p. 281-309.

[19] D. RUELLE, Thermodynamic Formalism, *Encyclopedia of Math. and its Appl.,* Vol. **5**, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1978.

[20] D. RUELLE, An Extension of the Theory of Fredholm Determinants, Institut des Hautes Études Scientifiques, *Publications Mathématiques*, Vol. **72**, 1990.
[21] D. RUELLE, Statistical mechanics of a one-dimensional lattice gas, *Commun. Math. Phys.*, Vol. **9**, 1968, p. 267-278.
[22] H. H. SCHAEFER, Topological vector spaces, *Macmillan Series in Advanced Mathematics and Theoretical Physics.*
[23] P. WALTERS, Ruelle's operator theorem and g-measures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, T. **214**, 1975, p. 375-387.

(Manuscrit reçu le 26 novembre 1992;
révisé le 30 juin 1993.)