Questions & réponses

Réponses

R791. Posé dans RMS 123-3
Lorsque X et Y sont deux variables indépendantes et de même loi, centrées et de variance 1, on a $\mathbb{E}(\max(X,Y)) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (voir R711 dans RMS 123-3).
a) Cette inégalité est-elle vraie lorsque l'on enlève l'hypothèse que X et Y sont de même loi (tout en gardant l'indépendance) ?
b) Si $X_1,\ldots,X_n$ sont indépendantes et identiquement distribuées, de loi centrée et de variance 1, quelles sont les bornes inférieure et supérieure de l'espérance de $\max(X_1,\ldots,X_n)$?

(Franck Taieb)

Dans RMS 125-1, il a été proposé un couple (X,Y) sous les hypothèses de a) pour lequel la borne supérieure de $\mathbb{E}(\max(X,Y))$ est égale à $3\sqrt{3}/8$, donc strictement supérieure à $\sqrt{3}/3$. Stricto sensu, le a) a été résolu, toutefois la valeur exacte de cette borne supérieure n'a toujours pas été donnée.

Voici une réponse au b). On y trouve la valeur exacte de la borne supérieure, qui est en fait un maximum. La borne inférieure est nulle.

Réponse de Denis Guibourg & Loïc Hervé pour la borne supérieure demandée au b)

On montrera

Proposition 1. *Soient $X_1,\cdots,X_n$ des variables aléatoires réelles (v.a.r.) indépendantes, de même loi, centrées et réduites. Alors :*

$$\mathbb{E}[\max(X_1,\cdots,X_n)] \leqslant \frac{n-1}{\sqrt{2n-1}}. \qquad (1)$$

En outre (1) est une égalité si la loi commune des v.a.r. $X_1,\cdots,X_n$ est la loi de densité f_n définie par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n\sqrt{2n-1}}\left(\frac{n-1}{n\sqrt{2n-1}}\,x + \frac{1}{n}\right)^{\frac{2-n}{n-1}} 1_{[-\frac{\sqrt{2n-1}}{n-1},\sqrt{2n-1}]}(x) \qquad (2)$$

Preuve de (1)

• Supposons d'abord que la loi commune des v.a.r. $X_1, \cdots, X_n$ est à densité *strictement positive*. Notons alors f cette densité, F la fonction de répartition *bijective* commune, et pour simplifier $M_n = \max(X_1, \cdots, X_n)$. La v.a.r. M_n a pour fonction de répartition F^n et pour densité $nF^{n-1}f$ d'où :

$$\mathbb{E}[M_n] = n\,\mathbb{E}[X_1 F(X_1)^{n-1}]. \tag{3}$$

Comme $\mathbb{E}[X_1] = 0$, on a pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[M_n] = n\mathbb{E}\Big[X_1\big(F(X_1)^{n-1} - a\big)\Big]$ et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\mathbb{E}[M_n] \leqslant n\,\mathbb{E}[X_1^2]^{\frac{1}{2}}\,\mathbb{E}\Big[\big(F(X_1)^{n-1} - a\big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

La quantité de droite est minimale lorsque $a = \mathbb{E}[F(X_1)^{n-1}]$, ce qui fait apparaître la variance de $F(X_1)^{n-1}$. Or pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la v.a.r. $F(X_1)^k$, à valeurs dans $[0,1]$, admet pour densité la fonction

$$\Phi_k : x \mapsto \frac{1}{k}\,x^{\frac{1-k}{k}}\,1_{[0,1]}(x) \tag{5}$$

car $F(X_1)$ est de loi uniforme sur $[0,1]$: on a en effet pour tout $x \in [0,1]$,

$$\mathbb{P}\big(F(X_1)^k \leqslant x\big) = \mathbb{P}\big(F(X_1) \leqslant x^{\frac{1}{k}}\big) = \mathbb{P}\big(X_1 \leqslant F^{-1}(x^{\frac{1}{k}})\big) = F\big(F^{-1}(x^{\frac{1}{k}})\big) = x^{\frac{1}{k}}.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}[F(X_1)^{n-1}] = \frac{1}{n}, \quad \mathbb{E}[F(X_1)^{2n-2}] = \frac{1}{2n-1} \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}[F(X_1)^{n-1}] = \frac{(n-1)^2}{n^2(2n-1)}.$$

On en déduit l'inégalité (1) puisque $\mathbb{E}[X_1^2] = 1$.

• Cas général : Soient $X_1, \cdots, X_n$ des v.a.r. indépendantes, de même loi, centrées et réduites. Soient $G_1, \cdots, G_n$ des v.a.r. toutes de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et telles que $X_1, \cdots, X_n$, $G_1, \cdots, G_n$ soient indépendantes. Soit $\varepsilon > 0$. Les v.a.r.

$$\widetilde{X_k} = \frac{X_k + \varepsilon G_k}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

sont de même loi à densité strictement positive, centrées et réduites. L'inégalité

$$\max(X_1, \cdots, X_n) \leqslant \sqrt{1+\varepsilon^2}\,\max(\widetilde{X_1}, \cdots, \widetilde{X_n}) + \varepsilon\max(-G_1, \cdots, -G_n)$$

implique alors, en notant $C_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{2n-1}}$:

$$\mathbb{E}[\max(X_1, \cdots, X_n)] \leqslant (\sqrt{1+\varepsilon^2} + \varepsilon)C_n$$

et, en faisant tendre ε vers 0 :

$$\mathbb{E}[\max(X_1, \cdots, X_n)] \leqslant C_n.$$

Preuve de (2)

Les détails des calculs sont laissés au lecteur. L'inégalité (1) est une égalité si l'inégalité (de Cauchy-Schwarz)

$$\mathbb{E}\left[X_1\left(F(X_1)^{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right] \leqslant \mathbb{E}[X_1^2]^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Var}[F(X_1)^{n-1}]^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

est une égalité, donc s'il existe une constante α tel que $F(X_1)^{n-1} - \dfrac{1}{n} = \alpha X_1$ presque sûrement. Nécessairement $\alpha = \dfrac{n-1}{n\sqrt{2n-1}}$ par l'égalité de (6) et

$$X_1 = \frac{n\sqrt{2n-1}}{n-1}\left(F(X_1)^{n-1}-\frac{1}{n}\right).$$

On utilise (5) avec $k = n-1$ pour déterminer la loi de X_1 et on vérifie avec (3) que $\mathbb{E}[\max(X_1,\cdots,X_n)] = \dfrac{n-1}{\sqrt{2n-1}}$ si les variables aléatoires $X_1,\cdots,X_n$ sont à densité donnée par (2). Enfin on vérifie que X_1 est bien centrée et de variance 1 en utilisant les deux premières égalités de (1).

Réponse de la RMS : la borne inférieure demadée au b) est nulle

Considérons une variable X chargeant deux valeurs : $+\varepsilon$ avec probabilité p, et $-\beta$ avec probabilité $1-p$, p ayant vocation à tendre vers 1. Une telle variable X est centrée lorsque $\beta = \dfrac{p\varepsilon}{1-p}$, et elle est de variance 1 lorsque $\varepsilon = \varepsilon_p = \sqrt{\dfrac{1-p}{p}}$.
Si $X_1,\ldots,X_n$ sont identiques, indépendantes et de même loi que X, alors $\max(X_1,\ldots,X_n) \leqslant \varepsilon_p$, et donc

$$\mathbb{E}\big(\max(X_1,\ldots,X_n)\big) \leqslant \varepsilon_p$$

Comme le majorant tend vers 0 lorsque $p \to 1$, la borne inférieure de l'espérance du max est nulle.