Un théorème de renouvellement

par Denis GUIBOURG et Loïc HERVÉ *

Résumé

Nous proposons une preuve détaillée du théorème de renouvellement pour les marches aléatoires à pas indépendants et identiquement distribués. Notre preuve repose sur des arguments analytiques de L. Breiman [2], mais n'utilise pas le caractère transitoire de la marche. Ainsi le théorème de renouvellement est établi en exploitant uniquement des résultats classiques d'analyse de Fourier et d'intégration. Une application classique au "paradoxe de l'autobus" est proposée.

Mots clés. Variables aléatoires ; Analyse de Fourier.

1 Théorème de renouvellement : introduction et énoncé

Supposons que le fonctionnement d'un appareil dépende d'un composant dont la durée de vie est aléatoire, et que ce composant soit remplacé (instantanément) par un nouveau dès qu'il est défaillant. Désignons par S_n l'instant du n-ème renouvellement, avec par convention $S_0 := 0$. La théorie du renouvellement consiste à étudier le comportement asymptotique, quand le temps augmente, du nombre moyen de renouvellements à effectuer durant un laps de temps donné τ_0. Pour modéliser ce problème, désignons par $X_1, X_2, \ldots$ les durées de vie des composants successifs. Ainsi $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires (v.a.) à valeurs positives, et il est naturel de supposer qu'elles sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.). L'instant du n-ème renouvellement est alors la variable aléatoire définie par : $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Enfin, pour $\tau_0 > 0$ et $t > 0$, on définit la v.a. $N_t(\tau_0)$ qui mesure le nombre de renouvellements effectués dans l'intervalle de temps $[t, t+\tau_0]$, à savoir : $N_t(\tau_0) := \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{N}^* : S_n \in [t, t+\tau_0]\}$. La question posée ci-dessus est donc la suivante : l'espérance de la v.a. $N_t(\tau_0)$, notée $\mathbb{E}[N_t(\tau_0)]$, admet-elle une limite quand $t \to +\infty$?

Cette question s'étend au cas d'une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de v.a.i.i.d. réelles (non nécessairement positives), les v.a. S_n étant définies comme précédemment. Dans ce cas, il est commode d'avoir une représentation de X_k et S_n, non plus en termes de durée et d'instant, mais plutôt en termes de distance parcourue (en valeur algébrique) et de position sur l'axe réel. Par exemple X_k peut être considérée comme le k-ème pas d'un marcheur, et S_n comme la position du marcheur après n pas (sachant qu'on pose encore $S_0 := 0$). La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi appelée marche aléatoire. Cette fois, pour $\ell_0 > 0$ (longueur donnée) et $a \in \mathbb{R}$ (abscisse),

*D. Guibourg, professeur en classe préparatoire PC au Lycée Rabelais de Saint-Brieuc, et L. Hervé, professeur des Universités, I.R.M.A.R. (UMR-CNRS 6625), INSA de Rennes.

on définit la v.a.

$$N_a(\ell_0) := \mathrm{Card}\big\{n \in \mathbb{N}^* : S_n \in [a, a+\ell_0]\big\}, \tag{1}$$

qui mesure le nombre de passages de S_n dans l'intervalle $[a, a+\ell_0]$. La question posée ici est : le nombre moyen de passages du marcheur dans $[a, a+\ell_0]$, à savoir $\mathbb{E}[N_a(\ell_0)]$, admet-il une limite quand $a \to -\infty$ et quand $a \to +\infty$?

On considère désormais une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de v.a.i.i.d. réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et l'on définit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la marche aléatoire associée à $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, en posant

$$S_0 = 0 \quad \text{ et } \quad \forall n \geq 1,\ S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

On note 1_A la fonction indicatrice d'une partie A de $\mathbb{R}$. Les deux questions précédentes peuvent être reformulées comme suit. Soit I un segment de $\mathbb{R}$, et soit N_a la v.a., à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, définie comme le nombre de passages de S_n dans $a + I$, c'est-à-dire :

$$N_a := \sum_{n=1}^{+\infty} 1_{a+I}(S_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} 1_I(S_n - a). \tag{2}$$

La quantité $\mathbb{E}[N_a]$, nombre moyen de passages de S_n dans $a + I$, admet-elle une limite quand $a \to -\infty$ et quand $a \to +\infty$? La réponse est donnée par le théorème dit de renouvellement, pour lequel nous rappelons les définitions classiques suivantes.

- X_1 est dite non-arithmétique s'il n'existe pas de couple $(u, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X_1 \in v + u\mathbb{Z}) = 1$ (i.e. X_1 n'est pas $\mathbb{P}-$presque-sûrement à valeurs dans un réseau de $\mathbb{R}$).
- La marche aléatoire $(S_n)_n$ est dite transiente (ou transitoire) si, pour tout segment I, S_n "passe dans I" un nombre fini de fois $\mathbb{P}$-presque sûrement. Autrement dit : $\mathbb{P}(\cap_n \cup_{k\geq n} [S_k \in I]) = 0$.

Théorème 1 `[Théorème du renouvellement]`
Soit X_1 une v.a.r. non-arithmétique admettant un moment d'ordre 1 telle que $m := \mathbb{E}[X_1] > 0$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur tout segment de $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement sur une partie au plus dénombrable, et telle que $f(u) = O(1/u^2)$ quand $|u| \to +\infty$. Alors

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}\big[|f(S_n - a)|\big] < +\infty, \tag{3}$$

$$\lim_{a\to-\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}\big[f(S_n - a)\big] = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}\big[f(S_n - a)\big] = \frac{1}{m}\int_{\mathbb{R}} f(x)dx. \tag{4}$$

Corollaire 1 *Supposons que X_1 vérifie les hypothèses du théorème 1. Alors, pour tout segment I de $\mathbb{R}$ et tout $a \in \mathbb{R}$, la v.a. N_a définie en (2) admet un moment d'ordre 1, et*

$$\lim_{a\to-\infty} \mathbb{E}[N_a] = 0 \quad ; \quad \lim_{a\to+\infty} \mathbb{E}[N_a] = \frac{|I|}{\mathbb{E}[X_1]}, \tag{5}$$

où l'on a noté $|I|$ la longueur de I. En outre la marche aléatoire $(S_n)_n$ est transiente.

Les premiers points du corollaire sont une conséquence évidente du théorème 1 (appliqué avec $f = 1_I$). Le caractère transitoire de $(S_n)_n$ s'en déduit puisque, si I est un segment de $\mathbb{R}$, alors la première assertion du corollaire assure que la v.a. $N_0 := \sum_{n=1}^{+\infty} 1_I(S_n)$ admet un moment d'ordre 1, donc N_0 est $\mathbb{P}$-presque sûrement finie. Les résultats du corollaire peuvent être reformulés comme suit : partant de $S_0 = -a$ (et non plus de $S_0 = 0$), le nombre moyen de passages de S_n dans I converge vers $|I|/\mathbb{E}[X_1]$ quand $a \to +\infty$, et vers 0 quand $a \to -\infty$. L'hypothèse $\mathbb{E}[X_1] > 0$ est naturellement vérifiée dans le premier exemple ci-dessus. Dans l'exemple du marcheur, l'hypothèse $\mathbb{E}[X_1] > 0$ signifie que le marcheur "a tendance" à se déplacer dans la direction du demi-axe positif. Enfin, en remplaçant X_n par $-X_n$, on obtient bien sûr des énoncés analogues aux précédents (inverser les deux limites).

Le théorème de renouvellement, encore appelé théorème de Blackwell, a une longue histoire, voir le livre classique de W. Feller [5]. On trouvera aussi en [1] différentes preuves et de nombreuses références. Dans la section suivante nous proposons une application classique au "paradoxe de l'autobus". Dans la section 3 nous présentons une preuve détaillée du théorème 1 s'inspirant très largement de la méthode analytique de L. Breiman dans [2], mais sans exploiter en pré-requis le caractère transitoire de la suite (S_n) (qui est obtenue ici comme une conséquence de la propriété de renouvellement). Notre preuve n'utilise que des résultats classiques d'analyse de Fourier et d'intégration.

2 Application au paradoxe de l'autobus

Supposons que $X_1, X_2, \ldots$ représentent les durées entre les passages successifs des bus pour un arrêt donné (cet arrêt ne concerne qu'une seule ligne). Les v.a. X_k sont donc ici positives, et S_n représente le temps de passage du n-ème bus à cet arrêt (avec $S_0 = 0$). Notons que les hypothèses d'indépendance et d'identique distribution sur les v.a. X_k, ainsi que l'hypothèse de non-arithméticité, sont très réalistes dans cet exemple. Supposons maintenant qu'un passager se présente à un instant $t > 0$ donné (non aléatoire) pour prendre le bus à cet arrêt, et définissons la v.a. A_t comme le temps d'attente du passager. Il est assez tentant de conjecturer que le temps moyen d'attente du passager $\mathbb{E}[A_t]$ est égal à $\mathbb{E}[X_1]/2$ (i.e. la moitié de la durée moyenne entre 2 bus). Cependant le résultat (6) ci-dessous montre que cette intuition n'est pas correcte. En effet, si X_1 admet un moment d'ordre 2 (i.e. $\mathbb{E}[X_1^2] < +\infty$), alors on a $\mathbb{E}[A_t] > \mathbb{E}[X_1]/2$ quand t est grand, plus précisément :

$$\exists\, T_0 > 0,\ \forall t \geq T_0, \quad \mathbb{E}[A_t] \geq \frac{\mathbb{E}[X_1^2]}{2\,\mathbb{E}[X_1]} > \frac{\mathbb{E}[X_1]}{2}. \tag{6}$$

La seconde inégalité de (6) découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\mathbb{E}[X_1^2] > \mathbb{E}[X_1]^2$, qui est stricte car X_1 est non-arithmétique, donc non dégénérée (i.e. X_1 n'est pas constante $\mathbb{P}$-p.s.). Notons qu'il existe des lois sur $\mathbb{R}_+$ telles que $\mathbb{E}[X_1] = 10$ par exemple (i.e. la durée moyenne entre 2 bus est 10 minutes) et telles que $\mathbb{E}[X_1^2]/\mathbb{E}[X_1]$ soit arbitrairement grand, et donc aussi le temps moyen d'attente du passager s'il se présente à l'arrêt à un instant t assez grand.

Preuve de la première inégalité de (6). Définissons la v.a. $N_t := \max\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$ qui mesure le nombre de bus passés devant l'arrêt avant l'instant t. Alors $A_t := S_{N_t+1} - t$. Soit

$x \geq 0$. Posons : $\forall u \in \mathbb{R},\ f_x(u) := 1_{]-\infty,0]}(u)\,\mathbb{P}(X_1 > x-u)$. Alors

$$\mathbb{P}(A_t > x) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\big[f_x(S_n - t)\big]. \tag{7}$$

En effet, de $[A_t > x] = \cup_{n\geq 0}[N_t = n, S_{n+1} > x+t]$, il vient que

$$[A_t > x] = \bigcup_{n\geq 0}\big[S_n \leq t < S_{n+1}, S_{n+1} > x+t\big] = \bigcup_{n\geq 0}\big[x - X_{n+1} < S_n - t \leq 0\big].$$

Remarquons que les événements ci-dessus sont disjoints. Soit μ la loi de X_1 (donc de X_{n+1}). Le lecteur, pour qui la notion de mesures abstraites n'est pas familière, pourra supposer dans les calculs ci-dessous que X_1 admet une densité d_X (i.e. remplacer $d\mu(y)$ ci-dessous par $d\mu(y) = d_X(y)\,dy$). Les v.a. X_{n+1} et S_n étant indépendantes, on obtient

$$\mathbb{P}(A_t > x) = \sum_{n\geq 0}\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} 1_{]x,+\infty[}(y)1_{]x-y,0]}(S_n - t)\,d\mu(y)\right] = \sum_{n\geq 0}\mathbb{E}\big[g_x(S_n - t)\big],$$

avec pour tout $u \in \mathbb{R}$

$$g_x(u) := \int_{\mathbb{R}} 1_{]x,+\infty[}(y)1_{]x-y,0]}(u)\,d\mu(y) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} 1_{]x-u,+\infty[}(y)\,d\mu(y) & \text{si} \quad u \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad u > 0 \end{cases}$$

d'où l'égalité (7) car $g_x = f_x$. Par un argument classique de monotonie, la fonction f_x est continue, sauf éventuellement sur une partie de $\mathbb{R}$ au plus dénombrable. En outre, d'après l'inégalité de Markov, on a $f_x(u) = O(1/u^2)$ quand $|u| \to +\infty$ car $\mathbb{E}[X_1^2] < +\infty$. D'après (7) et le théorème 1, on obtient en posant $m := \mathbb{E}[X_1]$

$$\lim_{t\to+\infty}\mathbb{P}(A_t > x) = \frac{1}{m}\int_{\mathbb{R}} f_x(u)\,du = \frac{1}{m}\int_x^{+\infty}\mathbb{P}(X_1 > v)\,dv.$$

Enfin, de l'égalité classique $\mathbb{E}[A_t] = \int_0^{+\infty}\mathbb{P}(A_t > x)\,dx$, on déduit du lemme de Fatou que

$$\liminf_{t\to+\infty}\mathbb{E}[A_t] \geq \frac{1}{m}\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty}\mathbb{P}(X_1 > v)\,dv\,dx = \frac{1}{m}\int_0^{+\infty}\frac{y^2}{2}\,d\mu(y).$$

Notons que la dernière égalité s'établit à nouveau grâce au théorème de Fubini en remarquant que $\mathbb{P}(X_1 > v) = \int_{\mathbb{R}} 1_{]v,+\infty[}(y)\,d\mu(y)$. La première inégalité de (6) est ainsi démontrée. $\square$

3 Preuve du théorème 1 par analyse de Fourier

On désigne par $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$. Si ν est une mesure positive sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et f une fonction ν-intégrable, on note indifféremment $\nu(f)$ ou $\int_{\mathbb{R}} f d\nu$ son intégrale relativement à ν. Soit $a \in \mathbb{R}$. Définissons, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, la somme :

$$\mu_a(1_A) := \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{E}\big[1_A(S_n - a)\big] \in [0, +\infty]. \tag{8}$$

L'application μ_a est une mesure positive sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$: μ_a est σ-additive car si $(B_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de boréliens disjoints, par convergence monotone et par un résultat classique sur les séries doubles à valeurs dans $[0, +\infty]$, on a :

$$\mu_a\big(\cup B_\ell\big) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{+\infty}\mathbb{E}\big[1_{B_\ell}(S_n - a)\big] = \sum_{\ell=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{E}\big[1_{B_\ell}(S_n - a)\big] = \sum_{\ell=1}^{+\infty}\mu_a(B_\ell).$$

Les conclusions du théorème 1 peuvent alors s'exprimer de manière équivalente comme suit : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur tout segment de $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement sur une partie au plus dénombrable, telle que $f(u) = O(1/u^2)$ quand $|u| \to +\infty$. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, f est μ_a-intégrable et, $\mathrm{Leb}(\cdot)$ désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{a\to-\infty}\mu_a(f) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{a\to+\infty}\mu_a(f) = \frac{\mathrm{Leb}(f)}{m}.$$

3.1 Convergence de mesures positives

Soit ν une (mesure de) probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, i.e. une mesure positive telle que $\nu(\mathbb{R}) = 1$. Rappelons que sa transformée de Fourier, notée $\widehat{\nu}$, est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\nu}(t) := \nu(e^{it\cdot}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}d\nu(x).$$

Théorème 2 `[P. Levy]` *Soit $\{\nu_p\}_{p\in\mathbb{N}} \cup \{\nu\}$ une famille de probabilités sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \lim_{p\to+\infty}\widehat{\nu}_p(t) = \widehat{\nu}(t).$$

Alors pour toute fonction bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement sur une partie ν-négligeable, on a $\lim_{p\to+\infty}\nu_p(f) = \nu(f)$.

Une preuve du théorème 2 dans le cas usuel d'une fonction f continue à support compact est proposée en Annexe. L'extension aux fonctions bornées ν-p.s. continues est un résultat classique, voir par exemple [3, Th. 3.4.33]. Notons que le théorème 2 ne peut s'appliquer directement (sous forme séquentielle) avec μ_a définie en (8) car μ_a n'est pas une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Nous disposons cependant du corollaire suivant :

Corollaire 2 *Soient $\{\mu_p\}_{p\in\mathbb{N}} \cup \{\mu\}$ une famille de mesures positives sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Supposons l'existence d'une fonction H continue sur $\mathbb{R}$, strictement positive, telle que :*

(i) $\lim_{r\to+\infty}\inf\{x^2H(x),\, |x| \geq r\} > 0$,

(ii) $\mu(H) < +\infty$ *et* $\forall p \in \mathbb{N}$, $\mu_p(H) < +\infty$,

(iii) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\lim_{p\to+\infty}\mu_p(e^{it\cdot}H) = \mu(e^{it\cdot}H)$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur tout segment de $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement sur une partie μ-négligeable, telle que $f(u) = O(1/u^2)$ quand $|u| \to +\infty$. Alors f est intégrable vis-à-vis des mesures μ et μ_p, et l'on a : $\lim_{p\to+\infty}\mu_p(f) = \mu(f)$.

Preuve. La fonction f/H est bornée sur $\mathbb{R}$ car, d'après (i), f/H est bornée sur $\mathbb{R} \setminus [-A, A]$ pour un certain $A > 0$. Donc f est intégrable relativement aux mesures μ et μ_p d'après (ii). Notant $c := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|/H(x) < +\infty$, on a de plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$|\mu_p(f)| \leq \mu_p(|f|) \leq c\,\mu_p(H).$$

Remarquons que d'après (iii) on a $\lim_p \mu_p(H) = \mu(H)$. Montrons maintenant que $\lim_p \mu_p(f) = \mu(f)$ en distinguant les cas $\mu = 0$ et $\mu \neq 0$. Si $\mu = 0$, on obtient bien $\lim_p \mu_p(f) = \mu(f) = 0$ car $\lim_p \mu_p(H) = \mu(H) = 0$. Si $\mu \neq 0$, alors il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq p_0$, $\mu_p(H) > 0$ car $\lim_p \mu_p(H) = \mu(H) > 0$. On peut alors définir, pour tout $p \geq p_0$, les probabilités suivantes :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \nu_p(1_A) := \frac{\mu_p(H1_A)}{\mu_p(H)} \quad \text{et} \quad \nu(1_A) := \frac{\mu(H1_A)}{\mu(H)}.$$

D'après (iii), on a $\lim_p \widehat{\nu}_p(t) = \widehat{\nu}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et donc d'après le théorème 2, $\lim_p \nu_p(g) = \nu(g)$ pour toute fonction bornée $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, sauf éventuellement sur une partie μ-négligeable (car ν-négligeable). On en déduit que $\lim_p \mu_p(Hg) = \mu(Hg)$. Et en considérant $g := f/H$, on obtient finalement $\lim_p \mu_p(f) = \mu(f)$. $\square$

Le théorème 1 sera prouvé grâce au corollaire 2 si nous démontrons qu'il existe une fonction H continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$ telle que, pour toute suite réelle (a_p) tendant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand p tend vers $+\infty$, les mesures $\mu_{a_p}(\cdot)$ définies en (8) vérifient les propriétés (i)-(iii) du corollaire 2 avec $\mu := \mathrm{Leb}(\cdot)/m$ (resp. 0). Ces propriétés seront établies dans la sous-section 3.3.

3.2 Fonction caractéristique de X_1, transformée de Fourier et l'espace $\mathcal{H}$

Notons ϕ la fonction caractéristique de X_1 définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par :

$$\phi(t) := \mathbb{E}\big[e^{itX_1}\big]. \tag{9}$$

Comme $\mathbb{E}[|X_1|\,] < +\infty$, ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi'(t) = i\,\mathbb{E}[e^{itX_1}X_1]$. En particulier $\phi'(0) = im$ et ϕ' est bornée sur $\mathbb{R}$. De plus, X_1 étant non-arithmétique, on a (cf. [4])

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad |\phi(t)| < 1. \tag{10}$$

Si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction Lebesgue-intégrable, sa transformée de Fourier, notée $\widehat{h}$, est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\widehat{h}(t) := \int_{\mathbb{R}} h(x)e^{-itx}dx.$$

Soit $\mathcal{H}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions h continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, intégrables sur $\mathbb{R}$, dont la transformée de Fourier $\widehat{h}$ est continue et à support compact. Rappelons que si $h \in \mathcal{H}$, on a la formule d'inversion de Fourier suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(t)e^{itx}\,dt. \tag{11}$$

En effet la formule d'inversion de Fourier est vérifiée par toute fonction h continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que h et $\widehat{h}$ soient intégrables sur $\mathbb{R}$.

Lemme 1 *Soient $h \in \mathcal{H}$ et $b > 0$ tel que $\widehat{h}(t) = 0$ pour tout $t \notin [-b, b]$. On a :*

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{E}\big[h(S_n)\big] = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{b} \widehat{h}(t)\phi(t)^n \, dt. \tag{12}$$

Preuve. L'égalité (11) et le théorème de Fubini nous donnent :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[h(S_n)\big] = \int_\Omega h(S_n(\omega)) \, d\mathbb{P}(\omega) &= \int_\Omega \Big(\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{b} \widehat{h}(t) e^{itS_n(\omega)} \, dt \Big) \, d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{b} \widehat{h}(t) \mathbb{E}\big[e^{itS_n}\big] \, dt. \end{aligned}$$

d'où (12) car $\mathbb{E}\big[e^{itS_n}\big] = \phi(t)^n$ par indépendance de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. □

Exercice 1 *Soit la fonction H définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par*

$$H(x) := \int_{x-\frac{\pi}{2}}^{x+\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin y}{y} \right)^2 \, dy. \tag{13}$$

1. *Montrer que H est le produit de convolution $\psi * 1_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ avec $\psi(y) := \sin^2 y / y^2$.*
2. *Soit $c > 0$. Calculer la transformée de Fourier de $g = 1_{[-c,c]}$.*
3. *En utilisant le fait que $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$ pour toutes fonctions f, g Lebesgue-intégrables, trouver la fonction $k(\cdot)$ telle que $\widehat{k} = \psi$.*
4. *Appliquer (11) pour obtenir $\widehat{\psi}$, et établir que $\widehat{H}$ est lipschitzienne et à support compact en utilisant à nouveau la formule $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$.*

3.3 Preuve du théorème 1

L'égalité (12) implique en particulier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \big|\mathbb{E}\big[h(S_n)\big]\big| \leq \frac{b}{\pi} \max_{t \in [-b,b]} |\widehat{h}(t)|$. On peut alors définir pour tous $h \in \mathcal{H}$ et $r \in [0, 1[$,

$$U_r(h) := \sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1} \, \mathbb{E}\big[h(S_n)\big].$$

Si $a \in \mathbb{R}$, on pose $h_a(x) := h(x - a), \; x \in \mathbb{R}$. Notons que $\forall t \in \mathbb{R}, \; \widehat{h}_a(t) = \widehat{h}(t) e^{-ita}$.

Lemme 2 *Soient $h \in \mathcal{H}$ et $b > 0$ tel que $\widehat{h}(t) = 0$ pour tout $t \notin [-b, b]$. Alors*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \; \forall r \in [0, 1[, \quad U_r(h_a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{b} \frac{\widehat{h}(t)\phi(t)}{1 - r\phi(t)} \, e^{-ita} \, dt. \tag{14}$$

Preuve. La série de fonctions continues $\sum_{n \geq 1} r^{n-1} \widehat{h}_a(\cdot)\phi(\cdot)^n$ converge normalement sur $[-b, b]$ puisque ϕ et $\widehat{h}$ sont bornées. Sa somme s'intègre donc terme à terme sur $[-b, b]$. On conclut grâce à (12) appliquée à h_a. □

Dans cette sous-section, nous admettons provisoirement (cf. sous-section 3.4) que, pour toute fonction $h \in \mathcal{H}$, à transformée de Fourier lipschitzienne, on a, pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{r \to 1^-} U_r(h_a) \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

$$\lim_{a \to -\infty} \lim_{r \nearrow 1} U_r(h_a) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{a \to +\infty} \lim_{r \nearrow 1} U_r(h_a) = \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}} h(x)\, dx, \tag{16}$$

et nous en déduisons le théorème 1 en appliquant le corollaire 2.

Preuve du théorème 1. Soit H définie par (13). Cette fonction H est continue, strictement positive et paire sur $\mathbb{R}$, et comme

$$\forall x \in]\frac{\pi}{2}, +\infty[, \quad H(x) \geq \frac{1}{(x+\frac{\pi}{2})^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 y\, dy,$$

il vient que

$$\lim_{r \to +\infty} \inf\{x^2 H(x),\, |x| \geq r\} \geq \frac{2}{\pi} > 0$$

de sorte que la propriété (i) du corollaire 2 est satisfaite. De plus, $\int_{\mathbb{R}} H(x)\, dx < +\infty$ car $x \mapsto x^2 H(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$, et comme $\widehat{H}$ est lipschitzienne et à support compact (voir Exercice 1), les propriétés (15) et (16) sont satisfaites avec $h = H$.

Démontrons que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction H est μ_a-intégrable avec $\mu_a(\cdot)$ définie en (8), c'est-à-dire que :

$$\mu_a(H) := \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[H_a(S_n)] < +\infty. \tag{17}$$

Posons $\ell_a := \lim_{r \nearrow 1} U_r(H_a)$. On sait d'après (15) que $\ell_a \in \mathbb{R}$. Comme la fonction $r \mapsto U_r(H_a)$ est positive et croissante sur $[0,1[$, on obtient pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{N} r^{n-1} \mathbb{E}\big[H(S_n - a)\big] \leq \sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1} \mathbb{E}[H_a(S_n)] \leq \ell_a.$$

En faisant tendre r vers 1 dans l'inégalité précédente, on obtient que la suite croissante $(\sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}[H(S_n - a)])_{N \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par ℓ_a et donc convergente. D'où (17).

Considérons une suite réelle (a_p). D'après ce qui précède, les mesures $\mu_{a_p}(\cdot)$ définies en (8) vérifient la propriété (ii) du corollaire 2 avec H définie ci-dessus. Il reste à vérifier que la propriété (iii) du corollaire 2 est satisfaite avec $\mu := \mathrm{Leb}(\cdot)/m$ si $a_p \to +\infty$ et $\mu = 0$ si $a_p \to -\infty$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Posons $h(\cdot) := e^{itx} H(\cdot)$. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $\widehat{h}(u) = \widehat{H}(u - t)$, donc $h \in \mathcal{H}$ et $\widehat{h}$ est lipschitzienne. Comme $|h_a| \leq H_a$, la série $\sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[h_a(S_n)]$ converge absolument d'après (17). On en déduit classiquement avec une transformation d'Abel que

$$\lim_{r \nearrow 1} U_r(h_a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[h_a(S_n)] := \mu_a(h).$$

La condition (iii) du corollaire 2 résulte alors de (16). $\square$

3.4 Preuves de (15) et (16)

Il existe un réel $\alpha > 0$ (désormais fixé) tel que

$$\forall (r,t) \in [\frac{1}{2}, 1] \times [-\alpha, \alpha], \quad |1 - r\phi(t)| \geq \frac{3m}{8}|t|. \tag{18}$$

En effet, comme ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $\phi'(0) = im$, on a $\phi(t) = 1 + imt + t\varepsilon(t)$ avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$. On choisit alors $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in [-\alpha, \alpha],\ |\varepsilon(t)| \leq m/4$, d'où (18) car

$$|1 - r\phi(t)| \geq |(1-r) - irmt| \; - \; r|t\,\varepsilon(t)| \; \geq r|t|\,(m - |\varepsilon(t)|).$$

Proposition 1 *Soit $h \in \mathcal{H}$ telle que $\widehat{h}$ soit lipschitzienne. Alors*

$$\lim_{r \nearrow 1} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\widehat{h}(t)\phi(t)}{1 - r\phi(t)}\, e^{-ita}\, dt \in \mathbb{C} \tag{19a}$$

$$\lim_{a \to -\infty} \lim_{r \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\widehat{h}(t)\phi(t)}{1 - r\phi(t)}\, e^{-ita}\, dt = 0 \tag{19b}$$

$$\lim_{a \to +\infty} \lim_{r \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\widehat{h}(t)\phi(t)}{1 - r\phi(t)}\, e^{-ita}\, dt = \frac{\widehat{h}(0)}{m} \tag{19c}$$

Commençons par déduire (15) et (16) de cette proposition.

Preuve de (15) et (16). Soit $b > \alpha$ tel que $\widehat{h}(t) = 0$ pour tout $t \notin [-b, b]$. Utilisons l'égalité (14) et la relation de Chasles. On a :

$$U_r(h_a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\widehat{h}(t)\phi(t)}{1 - r\phi(t)}\, e^{-ita}\, dt \; + \; \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{h}(t)\phi(t)}{1 - r\phi(t)}\, 1_{[\alpha,b]}(|t|)\, e^{-ita}\, dt.$$

Comme ϕ est continue sur $\mathbb{R}$, (10) implique que $\eta := \max_{\alpha \leq |t| \leq b} |\phi(t)| < 1$, de sorte que

$$\forall r \in [0, 1[, \qquad \min_{\alpha \leq |t| \leq b} |1 - r\phi(t)| \geq 1 - \eta > 0.$$

Le théorème de convergence dominée nous donne

$$\lim_{r \nearrow 1} U_r(h_a) = \lim_{r \nearrow 1} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\widehat{h}(t)\phi(t)}{1 - r\phi(t)}\, e^{-ita}\, dt + \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{h}(t)\phi(t)}{1 - \phi(t)}\, 1_{[\alpha,b]}(|t|)\, e^{-ita}\, dt \in \mathbb{C}$$

d'où (15). En outre le lemme de Riemann-Lebesgue nous donne :

$$\lim_{|a| \to +\infty} \lim_{r \nearrow 1} \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{h}(t)\phi(t)}{1 - r\phi(t)}\, 1_{[\alpha,b]}(|t|)\, e^{-ita}\, dt = \lim_{|a| \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{h}(t)\phi(t)}{1 - \phi(t)}\, 1_{[\alpha,b]}(|t|)\, e^{-ita}\, dt \; = \; 0.$$

On déduit alors (16) de la proposition 1. $\square$

Passons maintenant à la preuve de la proposition 1. Posons :

$$\frac{\widehat{h}(t)\phi(t)}{1-r\phi(t)} = f_1(r,t) + f_2(r,t) + f_3(r,t),$$

où, pour $(r,t) \in [0,1[\times[-\alpha,\alpha] \setminus \{0\}$,

$$f_1(r,t) = \frac{\widehat{h}(0)}{1-r(1+imt)},\ \ f_2(r,t) = \frac{\phi(t)\widehat{h}(t)-\widehat{h}(0)}{1-r\phi(t)},\ \ f_3(r,t) = \frac{\widehat{h}(0)\, r\big(\phi(t)-1-imt\big)}{(1-r\phi(t))\big(1-r(1+imt)\big)}.$$

La partie la plus technique de cette preuve consiste à montrer que

$$\lim_{|a|\to+\infty}\lim_{r\nearrow 1}\int_{-\alpha}^{\alpha} f_3(r,t)\, e^{-ita}\, dt = 0. \tag{20}$$

Cette propriété résultera des lemmes 5 et 6 établis dans la section 3.5. Nous admettons donc provisoirement ici la propriété (20) et nous en déduisons la proposition 1.

Preuve de la proposition 1. Commençons par démontrer le lemme simple suivant :

Lemme 3 *Soit* $J(a,r) := \displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{e^{-ita}}{1-r(1+imt)}\, dt$*. On a* $\displaystyle\lim_{r\nearrow 1} J(a,r) = \frac{1}{m}\left(\pi + \int_{-\alpha a}^{\alpha a}\frac{\sin t}{t}dt\right)$.

Preuve. On vérifie facilement que $J(0,r) = \frac{2}{rm}\arctan\left(\frac{rm\alpha}{1-r}\right)$. Donc

$$\lim_{r\nearrow 1} J(0,r) = \frac{\pi}{m}. \tag{21}$$

Supposons maintenant $a \neq 0$ et décomposons $J(a,r)$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} J(a,r) \quad &= \quad \int_{-\alpha a}^{\alpha a}\frac{1}{a(1-r)+irmt}dt + \int_{-\alpha a}^{\alpha a}\frac{\cos t - 1}{a(1-r)+irmt}dt + \int_{-\alpha a}^{\alpha a}\frac{i\sin t}{a(1-r)+irmt}dt \\ &:= \quad J_1(a,r) \ + \ J_2(a,r) \ + \ J_3(a,r). \end{aligned}$$

Le calcul explicite de $J_1(a,r)$ donne $\lim_{r\to 1} J_1(a,r) = \pi/m$. Par ailleurs on a :

$$\forall (r,t) \in [\frac{1}{2},1[\times[-\alpha,\alpha], \quad \frac{1-\cos t}{|a(1-r)+irmt|} \leq \frac{|t|}{m} \quad \text{ et } \quad \frac{|\sin t|}{|a(1-r)+irmt|} \leq \frac{2}{m}$$

car pour tout $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq 1-\cos t \leq t^2/2$ et $|\sin t| \leq |t|$. D'où

$$\lim_{r\to 1} J_2(a,r) \ = \ -\frac{i}{m}\int_{-\alpha a}^{\alpha a}\frac{\cos t - 1}{t}\, dt \ = \ 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{r\to 1} J_3(a,r) \ = \ \frac{1}{m}\int_{-\alpha a}^{\alpha a}\frac{\sin t}{t}\, dt$$

en appliquant le théorème de convergence dominée. □

Le lemme 3 et l'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\, dt = \pi$ nous donnent donc

$$\lim_{a\to-\infty}\lim_{r\nearrow 1}\int_{-\alpha}^{\alpha} f_1(r,t)\, e^{-ita}\, dt = 0 \quad \text{ et } \quad \lim_{a\to+\infty}\lim_{r\nearrow 1}\int_{-\alpha}^{\alpha} f_1(r,t)\, e^{-ita}\, dt = \frac{2\pi\,\widehat{h}(0)}{m}. \tag{22}$$

Lemme 4 *On a :* $\lim\limits_{|a|\to+\infty}\lim\limits_{r\nearrow 1}\int_{-\alpha}^{\alpha} f_2(r,t)\,e^{-ita}\,dt = 0.$

Preuve. Remarquons que

$$f_2(r,t) = \phi(t)\frac{\widehat{h}(t)-\widehat{h}(0)}{1-r\phi(t)} + \widehat{h}(0)\frac{\phi(t)-1}{1-r\phi(t)}.$$

Comme $\widehat{h}$ et ϕ sont lipschitziennes, f_2 est bornée sur $[\frac{1}{2},1]\times([-\alpha,\alpha]\setminus\{0\})$ d'après (18). Le théorème de convergence dominée nous donne alors :

$$\lim_{r\nearrow 1}\int_{-\alpha}^{\alpha} f_2(r,t)\,e^{-ita}\,dt = \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\phi(t)\,\widehat{h}(t)-\widehat{h}(0)}{1-\phi(t)}\,e^{-ita}\,dt,$$

et l'on conclut avec le lemme de Riemann-Lebesgue. □

La proposition 1 résulte immédiatement de (22), (20) et du lemme précédent. □

3.5 Preuve de (20)

Il s'agit de prouver que

$$\lim_{|a|\to+\infty}\lim_{r\nearrow 1}\int_{-\alpha}^{\alpha} q(r,t)\,e^{ita}dt = 0 \qquad \text{avec} \quad q(r,t) := \frac{r\big(\phi(t)-1-imt\big)}{(1-r\phi(t))\big(1-r(1+imt)\big)}. \tag{23}$$

Ce résultat s'obtient avec les lemmes 5 et 6 démontrés dans cette sous-section.

Lemme 5 *On a :*

$$\lim_{r\nearrow 1}\int_{-\alpha}^{\alpha} q(r,t)\sin(ta)\,dt = \frac{i}{m}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\phi(t)-1-imt}{t(1-\phi(t))}\sin(ta)\,dt \tag{24a}$$

$$\lim_{|a|\to+\infty}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\phi(t)-1-imt}{t(1-\phi(t))}\sin(ta)\,dt = 0. \tag{24b}$$

Preuve. Il existe $C>0$ tel que $\forall t\in[-\alpha,\alpha]$, $|\phi(t)-1-imt|\le C|t|$. Notons que, pour tout $t\in[-\alpha,\alpha]$ et pour tout $r\in[1/2,1]$, on a : $|1-r(1+imt)|\ge m|t|/2$. Comme $|\sin(ta)|\le|ta|$, on déduit (24a) de (18) et du théorème de convergence dominée. Pour la preuve de (24b), partons de l'égalité :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\phi(t)-1-imt}{t(1-\phi(t))}\sin(ta)\,dt = -\underbrace{\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\sin(ta)}{t}\,dt}_{:=J(a)} - im\underbrace{\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\sin(ta)}{1-\phi(t)}\,dt}_{:=K(a)}. \tag{25}$$

Pour $t\in\mathbb{R}^*$, posons $\xi(t) := \dfrac{1}{1-\phi(t)}$. On a :

$$K(a) \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(\underbrace{\int_{-\alpha}^{-\varepsilon}\xi(t)\sin(ta)\,dt}_{:=K_1(a)} + \underbrace{\int_{\varepsilon}^{\alpha}\xi(t)\sin(ta)\,dt}_{:=K_2(a)}\Big).$$

Comme ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\alpha,\alpha]$, on peut intégrer par parties $K_1(a)$ et $K_2(a)$:

$$\begin{aligned} K_1(a) &= \big[\xi(t)\frac{1-\cos(ta)}{a}\big]_{-\alpha}^{-\varepsilon} - \frac{1}{a}\int_{-\alpha}^{-\varepsilon}\phi'(t)\,\xi(t)^2\,(1-\cos(ta))\,dt \\ K_2(a) &= \big[\xi(t)\frac{1-\cos(ta)}{a}\big]_{\varepsilon}^{\alpha} - \frac{1}{a}\int_{\varepsilon}^{\alpha}\phi'(t)\,\xi(t)^2\,(1-\cos(ta))\,dt. \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}(1-\cos(a\varepsilon))\dfrac{\phi(-\varepsilon)-\phi(\varepsilon)}{(1-\phi(-\varepsilon))(1-\phi(\varepsilon))} = 0$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} K(a) &= \frac{1}{a}\big(1-\cos(a\alpha)\big)\big(\xi(\alpha)-\xi(-\alpha)\big) - \frac{1}{a}\int_{-\alpha}^{\alpha}\phi'(t)\,\xi(t)^2\,(1-\cos(ta))\,dt \\ &= \frac{1}{a}\big(1-\cos(a\alpha)\big)\big(\xi(\alpha)-\xi(-\alpha)\big) - \int_{-a\alpha}^{a\alpha}\frac{\phi'(\frac{s}{a})}{a^2(1-\phi(\frac{s}{a}))^2}(1-\cos(s))\,ds. \end{aligned}$$

Or ϕ' et, d'après (18), $t\mapsto t^2/(1-\phi(t))^2$, sont bornées sur $[-\alpha,\alpha]$. Le théorème de convergence dominée assure alors que $\lim_{a\to-\infty}K(a) = -i\pi/m$ et $\lim_{a\to+\infty}K(a) = i\pi/m$ car

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos(s)}{s^2}\,ds = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt = \pi.$$

(24b) se déduit alors de (25) en remarquant que $J(a) = \int_{-a\alpha}^{a\alpha}\frac{\sin(s)}{s}\,ds$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(s)}{s}\,ds = \pi$. $\square$

L'étude de la convergence quand $r\to 1$, puis $|a|\to+\infty$, de $\int_{-\alpha}^{\alpha}q(r,t)\cos(ta)dt$ est un peu plus délicate. Elle repose essentiellement sur la proposition suivante.

Proposition 2 *On a :* $\lim\limits_{r\nearrow 1}\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{1-r}{|1-r\phi(t)|^2}\,dt = \frac{\pi}{m}$.

Preuve. Procédons par étapes :

(i) Soit $\delta\in]0,1[$. Il existe $\beta=\beta(\delta)\in]0,\alpha]$ tel que l'on ait pour tout $(t,r)\in[-\beta,\beta]\times[0,1[$

$$(1-\delta)|1-r(1+imt)| \;\le\; |1-r\phi(t)| \;\le\; (1+\delta)|1-r(1+imt)|.$$

En effet, comme $\phi(t) = 1+imt+t\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$, on a :

$$\begin{aligned} |1-r\phi(t)| = \big|1-r(1+imt+t\varepsilon(t))\big| &= \Big|\big(1-r(1+imt)\big)\big(1-\frac{rt\varepsilon(t)}{1-r(1+imt)}\big)\Big| \\ &\le \big|1-r(1+imt)\big|\big(1+\frac{|\varepsilon(t)|}{m}\big). \end{aligned}$$

Idem $|1-r\phi(t)|\ge|1-r(1+imt)|(1-\dfrac{|\varepsilon(t)|}{m})$, d'où le résultat car $\lim_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$.

(ii) Soit $\varepsilon>0$. Il existe $\gamma(\varepsilon)\in]0,\alpha]$ et $r(\varepsilon)\in]0,1[$ tels que pour tout $r\in[r(\varepsilon),1[$,

$$\Big|\int_{-\gamma(\varepsilon)}^{\gamma(\varepsilon)}\frac{1-r}{|1-r\phi(t)|^2}\,dt - \frac{\pi}{m}\Big| \le \varepsilon. \tag{26}$$

En effet, soit $\delta \in]0,1[$ que nous fixerons à la fin à partir de ε. On a avec les notations du (i) :

$$\frac{1}{(1+\delta)^2}\int_{-\beta(\delta)}^{\beta(\delta)} \frac{1-r}{|1-r(1+imt)|^2}\,dt \le \int_{-\beta(\delta)}^{\beta(\delta)} \frac{1-r}{|1-r\phi(t)|^2}\,dt \le \frac{1}{(1-\delta)^2}\int_{-\beta(\delta)}^{\beta(\delta)} \frac{1-r}{|1-r(1+imt)|^2}\,dt$$

Un calcul direct montre que

$$\lim_{r\nearrow 1}\int_{-\beta(\delta)}^{\beta(\delta)} \frac{1-r}{|1-r(1+imt)|^2}\,dt = \frac{\pi}{m}.$$

Donc il existe $r(\varepsilon) \in]0,1[$ tels que pour tout $r \in [r(\varepsilon),1[$, on ait (par exemple) :

$$\frac{1}{(1+\delta)^3}\,\frac{\pi}{m} \le \int_{-\beta(\delta)}^{\beta(\delta)} \frac{1-r}{|1-r\phi(t)|^2}\,dt \le \frac{1}{(1-\delta)^3}\,\frac{\pi}{m}$$

c'est-à-dire tel que

$$-\,\frac{3\delta+3\delta^2+\delta^3}{(1+\delta)^3}\,\frac{\pi}{m} \le \int_{-\beta(\delta)}^{\beta(\delta)} \frac{1-r}{|1-r\phi(t)|^2}\,dt - \frac{\pi}{m} \le \frac{3\delta-3\delta^2+\delta^3}{(1-\delta)^3}\,\frac{\pi}{m}.$$

Pour obtenir (26) il suffit alors de considérer $\gamma(\varepsilon) = \beta(\delta_\varepsilon)$ avec $\delta_\varepsilon \in]0,1[$ choisi tel que

$$\frac{\pi}{m}\max\Big(\frac{3\delta_\varepsilon+3\delta_\varepsilon^2+\delta_\varepsilon^3}{(1+\delta_\varepsilon)^3}, \frac{3\delta_\varepsilon-3\delta_\varepsilon^2+\delta_\varepsilon^3}{(1-\delta_\varepsilon)^3}\Big) \le \varepsilon.$$

Terminons maintenant la preuve de la proposition 2. Soit $\varepsilon > 0$ et $\gamma(\varepsilon)$ donné en (26). L'inégalité (18) montre que

$$\lim_{r\nearrow 1}\underbrace{\left(\int_{-\alpha}^{-\gamma(\varepsilon)} \frac{1-r}{|1-r\phi(t)|^2}\,dt + \int_{\gamma(\varepsilon)}^{\alpha} \frac{1-r}{|1-r\phi(t)|^2}\,dt\right)}_{:=Q(\varepsilon)} = 0. \tag{27}$$

D'après (26) et (27), il existe $r'(\varepsilon) \in]r(\varepsilon),1[$ tel que pour tout $r \in]r'(\varepsilon),1[$,

$$\left|\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1-r}{|1-r\phi(t)|^2}\,dt - \frac{\pi}{m}\right| \;\le\; \left|\int_{-\gamma(\varepsilon)}^{\gamma(\varepsilon)} \frac{1-r}{|1-r\phi(t)|^2}\,dt - \frac{\pi}{m}\right| + Q(\varepsilon) \;\le\; 2\varepsilon.$$

D'où la convergence de la proposition 2. $\square$

Corollaire 3 *On a :* $\displaystyle\lim_{r\nearrow 1}\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1-rRe(\phi(t))}{|1-r\phi(t)|^2}\cos(ta)\,dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1-Re(\phi(t))}{|1-\phi(t)|^2}\cos(ta)\,dt \;+\; \frac{\pi}{m}.$

Preuve. Commençons par établir que, pour tout $R > 0$:

$$\int_0^R \frac{1-Re(\phi(t))}{t^2}\,dt < +\infty. \tag{28}$$

Notons ν la loi de X_1. Comme $1 - Re(\phi(t)) = \int_{\mathbb{R}}(1-\cos(t|x|))d\nu(x)$, le théorème de Fubini-Tonelli et le changement de variable $s = t|x|$, $x \neq 0$, nous donnent :

$$\begin{aligned}\int_0^R \frac{1-Re(\phi(t))}{t^2}\,dt = \int_{\mathbb{R}}\int_0^R \frac{1-\cos(t|x|)}{t^2}\,dt\,d\nu(x) &\leq \int_{\mathbb{R}} |x| \int_0^{R|x|} \frac{1-\cos(s)}{s^2}\,ds\,d\nu(x) \\ &\leq \mathbb{E}[|X_1|\,] \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(s)}{s^2}\,ds,\end{aligned}$$

d'où (28). Pour démontrer maintenant le corollaire 3, partons de l'égalité évidente :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1-rRe(\phi(t))}{|1-r\phi(t)|^2}\cos(ta)\,dt = r\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1-Re(\phi(t))}{|1-r\phi(t)|^2}\cos(ta)\,dt + \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1-r}{|1-r\phi(t)|^2}\cos(ta)\,dt.$$

D'une part, grâce à (18) et (28), on obtient par le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{r\nearrow 1} r\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1-Re(\phi(t))}{|1-r\phi(t)|^2}\,\cos(ta)\,dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1-Re(\phi(t))}{|1-\phi(t)|^2}\,\cos(ta)\,dt.$$

D'autre part utilisons l'égalité :

$$\begin{aligned}\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1-r}{|1-r\phi(t)|^2}\,\cos(ta)\,dt &= (1-r)\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\cos(ta)-1}{|1-r\phi(t)|^2}\,dt + \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1-r}{|1-r\phi(t)|^2}\,dt \\ &:= (1-r)\,E_r + F_r,\end{aligned}$$

Comme on a $\lim_{r\to 1} E_r = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\cos(ta)-1}{|1-\phi(t)|^2}\,dt$ par convergence dominée (utiliser (18)) et comme $\lim_{r\to 1} F_r = \pi/m$ d'après la proposition 2, on en déduit la convergence du corollaire 3. $\square$

Le corollaire 3 va nous permettre finalement d'étudier la convergence de $\int_{-\alpha}^{\alpha} q(r,t)\cos(ta)dt$ quand $r\to 1$ puis $|a|\to+\infty$, et de conclure ainsi la preuve de (23) (donc de (20)).

Lemme 6 *On a :*

$$\lim_{r\nearrow 1}\int_{-\alpha}^{\alpha} q(r,t)\,\cos(ta)\,dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1-Re(\phi(t))}{|1-\phi(t)|^2}\,\cos(ta)\,dt \tag{29a}$$

$$\lim_{|a|\to+\infty}\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1-Re(\phi(t))}{|1-\phi(t)|^2}\,\cos(ta)\,dt = 0. \tag{29b}$$

Preuve. D'après (18) et (28), la fonction $t \mapsto (1-Re(\phi(t)))\,|1-\phi(t)|^{-2}$ est intégrable sur $[-\alpha,\alpha]$. D'où (29b) par le lemme de Riemann-Lebesgue. Pour établir (29a), remarquons que :

$$q(r,t) = \frac{1}{r}\bigg(\frac{1}{1-r\phi(t)} - \frac{1}{1-r(1+imt)}\bigg).$$

Comme les fonctions $t\mapsto Im(\phi(t))\cos(ta)\,|1-r\phi(t)|^{-2}$ et $t\mapsto t\cos(ta)[(1-r)^2+r^2m^2t^2]^{-1}$ sont impaires sur $[-\alpha,\alpha]$, on a :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} q(r,t)\,\cos(ta)\,dt = \frac{1}{r}\bigg(\underbrace{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1-rRe(\phi(t))}{|1-r\phi(t)|^2}\,\cos(ta)\,dt}_{:=U_1(r)} - (1-r)\underbrace{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\cos(ta)}{(1-r)^2+r^2m^2t^2}\,dt}_{:=U_2(r)}\bigg).$$

La limite de $U_1(r)$ quand $r \nearrow 1$ est fournie par le corollaire 3. Pour calculer la limite de $U_2(r)$ quand $r \nearrow 1$, partons de l'égalité évidente suivante :

$$U_2(r) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\cos(ta) - 1}{(1-r)^2 + r^2 m^2 t^2}\, dt + \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{dt}{(1-r)^2 + r^2 m^2 t^2}.$$

Par convergence dominée on obtient :

$$\lim_{r \nearrow 1} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\cos(ta) - 1}{(1-r)^2 + r^2 m^2 t^2}\, dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\cos(ta) - 1}{m^2 t^2}\, dt.$$

Donc $\lim_{r \nearrow 1} (1-r)\, U_2(r) = \lim_{r \nearrow 1} (1-r) \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{dt}{(1-r)^2 + r^2 m^2 t^2} = \frac{\pi}{m}$ d'après (21). D'où (29a). $\square$

A Une preuve du théorème de P. Levy

Le théorème 2 s'obtient sans difficultés pour une fonction f continue à support compact à l'aide des deux propositions suivantes :

Proposition A.1 *Si la suite $(\widehat{\nu}_p)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\widehat{\nu}$, alors pour tout $h \in \mathcal{H}$, on a :* $\lim_{p \to +\infty} \nu_p(h) = \nu(h)$.

Preuve. Soit $h \in \mathcal{H}$. En utilisant (11), puis le théorème de Fubini, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} h(x) d\nu_p(x) = \int_{\mathbb{R}} \big(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(t) e^{itx} dt \big)\, d\nu_p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(t)\, \widehat{\nu}_p(t)\, dt.$$

Par convergence dominée, cette dernière intégrale converge, quand p tend vers $+\infty$, vers $(2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(t) \widehat{\nu}(t) dt$. En explicitant $\widehat{\nu}$, puis en appliquant à nouveau le théorème de Fubini et (11), on obtient que l'intégrale précédente est égale à $\int_{\mathbb{R}} h(x)\, d\nu(x)$. $\square$

Proposition A.2 *Toute fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ à support compact est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions de $\mathcal{H}$.*

Preuve. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ h(x) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin(x/2)}{x} \right)^2$ et $h(0) = 1/(2\pi)$. On peut vérifier en utilisant (11) que : $\forall t \in \mathbb{R},\ \hat{h}(t) = (1 - |t|) 1_{[-1,1]}(t)$. Par conséquent h est une fonction de $\mathcal{H}$, positive et d'intégrale 1. Définissons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction h_n par : $h_n(x) = n h(nx)$, $x \in \mathbb{R}$. La suite (h_n) est une identité approchée, c'est-à-dire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{\mathbb{R}} h_n(x)\, dx = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall \delta > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} \int_{|x| \geq \delta} h_n(x)\, dx = 0.$$

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ à support compact. On définit le produit de convolution de h_n et f en posant pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $(h_n * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} h_n(y) f_n(x-y)\, dy$. On montre classiquement, en exploitant l'uniforme continuité de f sur $\mathbb{R}$, que la suite $(h_n * f)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve la proposition car $h_n * f \in \mathcal{H}$: en effet, $h_n \in \mathcal{H}$ et avec le théorème de Fubini, $\widehat{h_n * f} = \widehat{h_n} \cdot \widehat{f}$ est à support compact. $\square$

Références

[1] G. Alsmeyer, *Renewal, Recurrence and Regeneration.* Disponible sur le site de l'auteur : http ://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/alsmeyer/Skripten/rt_book.pdf.

[2] L. Breiman, *Probability.* Classic in Applied Mathematics, SIAM, 1993.

[3] D. Dacunha-Castelle, M. Duflo, *Probabilités et statistiques. Tome 1.* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Masson, Paris, 1982.

[4] R. Durrett, *Probability : theory and examples.* Wadsworth Brooks, 1991.

[5] Feller W. *An introduction to probability theory and its applications, Vol. II.* John Wiley and Sons, New York (1971).