

THÉORÈME LOCAL POUR CHAÎNES DE MARKOV
DE PROBABILITÉ DE TRANSITION QUASI-COMPACTE.
APPLICATIONS AUX CHAÎNES V -GÉOMÉTRIQUEMENT
ERGODIQUES ET AUX MODÈLES ITÉRATIFS.

HERVÉ Loïc
I.R.M.A.R., UMR-CNRS 6625,
Institut National des Sciences Appliquées de Rennes,
20, Avenue des Buttes de Couësmes CS 14 315, 35043 Rennes Cedex.
Loic.Herve@insa-rennes.fr

Résumé. Soit Q une probabilité de transition sur un espace mesurable E , soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov associée à Q , et enfin soit ξ une fonction réelle mesurable sur E telle que $(\xi(X_n))_{n \geq 0}$ vérifie un théorème limite central. Sous des hypothèses fonctionnelles sur l'action de Q et de ses noyaux de Fourier $Q(t)$, nous démontrons dans ce papier un théorème limite local. Nous utilisons la méthode spectrale de Nagaev améliorée par un théorème de perturbation de Keller et Liverani. Les conditions requises dans ce travail sur $Q(t)$ sont plus faibles que celles habituellement imposées lorsqu'on utilise le théorème de perturbation standard. Nous présentons des applications aux chaînes V -géométriquement ergodiques et aux modèles itératifs Lipschitziens.

Abstract. Let Q be a transition probability on a measurable space E , let $(X_n)_n$ be a Markov chain associated to Q , and let ξ be a real-valued measurable function on E such that $(\xi(X_n))_{n \geq 0}$ satisfies a central limit theorem. Under functional hypotheses on the action of Q and its Fourier kernels $Q(t)$, we establish a local limit theorem. We use the spectral method of Nagaev improved by a perturbation theorem of Keller and Liverani. The conditions required here on $Q(t)$ are weaker than the ones usually imposed when the standard perturbation theorem is used in the spectral method. We give some applications to V -geometric ergodic chains and to Lipschitz iterative models.

I. INTRODUCTION

Soit (E, \mathcal{E}) un espace mesurable, soit Q une probabilité de transition sur (E, \mathcal{E}) , et soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov sur (E, \mathcal{E}) associée à Q . On désigne par ξ une fonction mesurable de E dans \mathbb{R} , et l'on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \xi(X_k)$.

Dans toute la suite, nous supposerons qu'il existe sur E une probabilité Q -invariante, notée ν , que ξ est ν -intégrable, et enfin que $\nu(\xi) = 0$ (quitte à remplacer ξ par $\xi - \nu(\xi)$, on peut toujours se ramener à cette condition).

L'objet principal de ce travail est d'établir, sous des hypothèses précisées au paragraphe II, un théorème limite local pour la suite de variables aléatoires $(\xi(X_n))_{n \geq 0}$. Ce théorème a été initialement obtenu par Kolmogorov [17] dans le cadre des chaînes de Markov finies. ¹ Grâce à des techniques de perturbation d'opérateurs, un théorème limite local fut ensuite établi par Nagaev [20] [21] sous une hypothèse de quasi-compacité (cf. (F2) § II) du noyau Q . La méthode spectrale de Nagaev a été par la suite largement appliquée dans le but d'obtenir non seulement un théorème local, mais également un théorème limite central avec vitesse, un théorème de renouvellement, et des théorèmes de grandes déviations. Pour le théorème local, citons par exemple [7] [26], et [24] [5] [23] dans le cadre de systèmes dynamiques.

On trouvera une description générale de la méthode spectrale dans [12]. Rappelons que, en substance, celle-ci peut être décomposée selon les quatre étapes (a)-(d) qui suivent :

- (a) *Faire le lien entre la fonction caractéristique de S_n et les itérés des noyaux de Fourier $Q(t) = e^{it\xi}Q$ associés à Q et ξ (voir la formule (2) du § IV.3).*
- (b) *À l'aide d'un théorème de perturbation d'opérateurs appliqué à $Q(\cdot)$, établir que, pour $|t|$ assez petit, $Q(t)$ vérifie les mêmes propriétés spectrales que Q ; en particulier $Q(t)$ aura une valeur propre dominante $\lambda(t)$ proche de $\lambda = 1$ en $t = 0$.*
- (c) *À l'aide d'hypothèses de régularité sur $Q(\cdot)$, obtenir des précisions sur le comportement en $t = 0$ des éléments perturbés, notamment de $\lambda(t)$.*
- (d) *Appliquer ensuite, comme dans le cas des suites de v.a.i.i.d, les techniques usuelles de transformée de Fourier.*

Les difficultés résident ici dans les étapes (b) et (c). Dans les travaux cités ci-dessus, celles-ci sont traitées parallèlement en appliquant à $Q(\cdot)$, dans son action sur un certain espace \mathcal{B} , le théorème standard de perturbation d'opérateurs : il suffit pour cela que l'application $Q(\cdot)$, à valeurs dans l'espace des endomorphismes continus de \mathcal{B} , soit suffisamment régulière. Cette technique est souvent bien adaptée lorsque la fonction ξ est bornée sur E . ² Cette dernière condition est d'ailleurs imposée dans tous les travaux mentionnés plus haut (excepté [12]).

Malheureusement, si ξ est non bornée, l'application du théorème standard de perturbation d'opérateurs requiert des hypothèses assez contraignantes sur Q , par exemple des conditions de moments exponentiels dans le cadre des noyaux Lipschitziens, voir [19] et [12] (Chap. X).

¹À notre connaissance la méthode de [17] n'a pas été généralisée.

²En fait le théorème standard de perturbation d'opérateurs s'applique aisément à $Q(t)$ lorsque \mathcal{B} est une algèbre de Banach et que $\xi \in \mathcal{B}$; en effet, dans ce cas, $Q(\cdot)$ est analytique (voir par ex. [12] lemme VIII.10).

Dans ce même contexte d'itérés de transformations Lipschitziennes, une première amélioration a été apportée dans [13] où l'on établit, sous des hypothèses de moments polynomiaux, un théorème limite local et un théorème limite central avec vitesse. Les idées dans [13] sont

- Pour l'étape (b) : remplacer le théorème classique de perturbation d'opérateurs par un résultat de Keller-Liverani [16].³
- Pour l'étape (c) : considérer $Q(t)$, non pas comme un endomorphisme de \mathcal{B} , mais comme une application linéaire entre deux espaces convenablement choisis.

Dans ce papier, le cadre est plus général qu'en [13], mais nous n'abordons pas la question de vitesse dans le théorème limite central. Nous nous intéressons principalement au théorème limite local, et notre méthode peut être résumée comme suit.

- Pour l'étape (b) : grâce aux hypothèses fonctionnelles (\mathcal{F}) du § II, nous appliquerons à nouveau aux noyaux $Q(t)$ le théorème de Keller-Liverani (cf. Th. (K-L), § IV).
- Pour l'étape (c) : l'étude du comportement en $t = 0$ de la valeur propre perturbée $\lambda(t)$ est fondée, non plus sur la régularité de $Q(\cdot)$, mais sur un argument de nature probabiliste : plus précisément nous supposons que $(\xi(X_n))_{n \geq 0}$ vérifie un théorème limite central (t.l.c) dans le cas stationnaire, et nous démontrons que cette hypothèse implique pour $\lambda(t)$ un développement limité à l'ordre 2 en $t = 0$ (cf. Lemme IV.2).

Les énoncés, présentés au paragraphe II, portent plus généralement sur la suite de v.a $(X_n, S_n)_n$. Ils contiennent un théorème limite central et un théorème limite local, dans les cas stationnaire et non stationnaire. Quelques remarques relatives aux hypothèses sont regroupées à la fin du paragraphe II. Nous présentons au paragraphe III des applications et exemples, notamment dans le cadre des chaînes V -géométriquement ergodiques et des modèles itératifs. Le paragraphe IV est consacré aux preuves des théorèmes limites.

Notations. Si X et Y sont des espaces de Banach, nous désignons par X' le dual topologique de X , par $\mathcal{L}(X)$ l'espace des endomorphismes continus de X , et par $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des applications linéaires continues de X dans Y . Ces espaces sont munis des normes subordonnées. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le crochet de dualité sur $X' \times X$. Si $T \in \mathcal{L}(X)$, $r(T)$ désigne le rayon spectral de T , et T^* l'opérateur adjoint de T .

Rappelons que ν désigne une probabilité Q -invariante. Pour $p \geq 1$ on note $\mathbb{L}^p(\nu)$ l'espace de Lebesgue usuel associé à ν . On note $\mathbf{1} = 1_E$ la fonction identiquement égale à 1 sur E .

Si μ est une probabilité sur E , nous noterons parfois $\mu(f) = \int_E f d\mu$. Si X est composé de fonctions mesurables sur E , à valeurs complexes, et si toute fonction $f \in X$ est μ -intégrable, μ s'identifie ainsi à une forme linéaire sur X ; nous écrirons $\mu \in X'$ lorsque celle-ci est continue.

La probabilité initiale de la chaîne, c'est-à-dire la loi de X_0 , sera appelée μ_0 .

L est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} , et $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ est la loi normale centrée, de variance $\sigma^2 > 0$.

Enfin les noyaux de Fourier associés à Q et ξ sont définis par

$$Q(t)(x, dy) = e^{it\xi} Q(x, dy), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in E.$$

³Le théorème de [16] est particulièrement adapté lorsque $Q(t)$ vérifie les conditions du théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu [15] (en substance les conditions (F3) (F5) du § II).

II. HYPOTHÈSES ET ÉNONCÉS DES RÉSULTATS

Hypothèse (P). *Sous la probabilité \mathbb{P}_ν , $(\frac{S_n}{\sqrt{n}})_n$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ ($\sigma^2 > 0$).*

Dans toute la suite, nous désignons par $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ un espace de Banach composé de fonctions (ou de classes de fonctions) mesurables sur E , à valeurs complexes, et nous supposons que

$\mathbf{1} \in \mathcal{B}$, \mathcal{B} est réticulé (ie. $f \in \mathcal{B} \Rightarrow |f| \in \mathcal{B}$), et $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ ⁴.

Nous ferons appel aux hypothèses fonctionnelles suivantes.

Hypothèse (F). *Les conditions (F1)-(F5) ci-dessous sont satisfaites :*

(F1) *Il existe $q \in]1, +\infty]$ tel que \mathcal{B} s'envoie continûment dans $\mathbb{L}^q(\nu)$.* ⁵

(F2) *Il existe $\kappa_0 < 1$ et $C \geq 0$ tels que : $\forall n \geq 1, \forall f \in \mathcal{B}, \|Q^n f - \nu(f)\| \leq C \kappa_0^n \|f\|$.* ⁶

(F3) *$Q(\{f \in \mathcal{B}, \|f\| \leq 1\})$ est relativement compacte dans $(\mathcal{B}, \nu(|\cdot|))$.* ⁷

(F4) *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f \mapsto e^{it\xi} f$ définit un endomorphisme continu sur \mathcal{B} .* ^{8 9}

(F5) *Il existe un intervalle ouvert I contenant $t = 0$, puis $N \in \mathbb{N}^*$, $\kappa < 1$, $C \geq 0$ tels que*

$$\forall t \in I, \forall f \in \mathcal{B}, \|Q(t)^N f\| \leq \kappa^N \|f\| + C\nu(|f|).^{10}$$

Hypothèse (ξ est non-arithmétique) : *pour tous réels $0 < \alpha < \beta$, il existe $\rho < 1$, $c \geq 0$ tels que l'on ait*

$$\forall n \geq 1, \sup_{\alpha \leq |t| \leq \beta} \|Q(t)^n\| \leq c\rho^n. \quad ^{11}$$

Hypothèse ($\tilde{\mathcal{F}}$). *Le couple (Q, \mathcal{B}) vérifie (F), et il existe un espace de Banach $\tilde{\mathcal{B}}$ tel que :*

\mathcal{B} s'envoie continûment dans $\tilde{\mathcal{B}}$

$\nu \in \tilde{\mathcal{B}}'$

$Q \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{B}})$ et $(Q, \tilde{\mathcal{B}})$ vérifie (F2)

Quand $t \rightarrow 0$, $Q(t)$ converge vers Q dans $\mathcal{L}(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})$.

⁴ie. Pour tous $f \in \mathcal{B}$ et $x \in E$, f est $Q(x, \cdot)$ -intégrable, $Qf = \int_E f(y)Q(\cdot, dy) \in \mathcal{B}$, et cette formule définit un endomorphisme continu sur \mathcal{B} .

⁵ie. $\exists A > 0, \forall f \in \mathcal{B}, (\nu(|f|^q))^{\frac{1}{q}} \leq A \|f\|$. Cette condition implique que $\nu \in \mathcal{B}'$, cf. Rq. 2.

⁶ie. Q est quasi-compact à itérés bornés sur \mathcal{B} , avec 1 comme valeur propre simple et unique valeur propre périphérique, voir Rq. 3.

⁷ie. Si $(f_n)_n \in \mathcal{B}^N, \|f_n\| \leq 1$, alors il existe une sous-suite $(n_k)_k$ et $g \in \mathcal{B}$ tels que $\lim_k \nu(|Qf_{n_k} - g|) = 0$.

⁸ie. $\forall t \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{B}, e^{it\xi} f \in \mathcal{B}$, et $\forall t \in \mathbb{R}, \exists M_t > 0, \forall f \in \mathcal{B}, \|e^{it\xi} f\| \leq M_t \|f\|$.

⁹Les conditions (F3)-(F4) peuvent être remplacées par : pour $t \in \mathbb{R}, Q(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ et pour $|t|$ petit, $Q(t)(\{f \in \mathcal{B}, \|f\| \leq 1\})$ est relativement compacte dans $(\mathcal{B}, \nu(|\cdot|))$, cf. Rq 4.

¹⁰ie. Les inégalités de type (F5) sont dites de Doeblin-Fortet ; elles interviennent par exemple dans le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu. Voir Rq. 3.

¹¹Il est sous-entendu ici que les noyaux $Q(t)$ ont une action continue sur \mathcal{B} . Sous des conditions assez générales, un critère simple de non-arithméticité sera donné dans la remarque 6.

Dans le théorème ci-dessous, on s'intéresse aux deux propriétés suivantes :

(TLC) Pour tout $f \in \mathcal{B}$, $f \geq 0$, et pour toute fonction réelle g continue bornée sur \mathbb{R} ,

$$\lim_n \mathbb{E}_{\mu_0} \left[f(X_n) g \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \right] = \nu(f) \mathcal{N}(0, \sigma^2)(g).$$

(TLL) Pour tout $f \in \mathcal{B}$, $f \geq 0$, et toute fonction réelle g continue à support compact sur \mathbb{R} ,

$$\lim_n \sup_{u \in \mathbb{R}} \left| \sigma \sqrt{2\pi n} \mathbb{E}_{\mu_0} \left[f(X_n) g(S_n - u) \right] - e^{\frac{-u^2}{2n\sigma^2}} \nu(f) L(g) \right| = 0.$$

Théorème II.1.

CAS STATIONNAIRE. Supposons que $\mu_0 = \nu$. Alors, sous les hypothèses (\mathcal{P}) et (\mathcal{F}) , la propriété (TLC) est satisfaite. Si en outre ξ est non-arithmétique, alors la propriété (TLL) est vérifiée.

CAS NON STATIONNAIRE. Supposons que les hypothèses (\mathcal{P}) et $(\tilde{\mathcal{F}})$ soient satisfaites, et que $\mu_0 \in \tilde{\mathcal{B}}'$. Alors la propriété (TLC) est satisfaite. Si en outre ξ est non-arithmétique, la propriété (TLL) est vérifiée.

Le cas $f = \mathbf{1}$ dans (TLC) [resp. $f = \mathbf{1}$ et $u = 0$ dans (TLL)] correspond pour la suite $(\xi(X_n))_{n \geq 0}$ à l'énoncé standard du théorème limite central [resp. du théorème limite local]. Évidemment, pour $f = \mathbf{1}$ et $\mu_0 = \nu$, la propriété (TLC) coïncide avec l'hypothèse (\mathcal{P}) .

• **Remarque 1.** Une condition suffisante pour (\mathcal{P}) .

Dans le cadre des chaînes de Markov, plusieurs méthodes existent, notamment dans le cas stationnaire, pour établir le t.l.c. La plus naturelle dans ce papier, du fait de l'hypothèse (F2), est la méthode de Gordin. On dispose par exemple du résultat suivant. Supposons que $(X_n)_{n \geq 0}$ soit la chaîne de Markov canonique associée à Q , et que la sous-tribu de \mathcal{E} engendrée par les fonctions de \mathcal{B} coïncide avec \mathcal{E} .

Proposition II.2. Si \mathcal{B} s'envoie continûment dans $\mathbb{L}^2(\nu)$ (ie. (F1) avec $q = 2$), si $\xi \in \mathcal{B}$, et enfin si (Q, \mathcal{B}) vérifie la condition (F2), alors la suite de v.a. $(\frac{S_n}{\sqrt{n}})_n$ converge en loi, sous la probabilité \mathbb{P}_ν , vers la gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, avec $\sigma^2 = \nu(\tilde{\xi}^2) - \nu((Q\tilde{\xi})^2)$, où l'on a noté $\tilde{\xi} = \sum_{n \geq 0} Q^n \xi$ (le cas $\sigma^2 = 0$ n'est pas exclu dans cet énoncé).

Preuve. On suit ici la méthode de Gordin [8] [9]. La série $\sum_{n \geq 0} Q^n \xi$ converge absolument dans \mathcal{B} , et sa somme $\tilde{\xi}$ vérifie l'équation de Poisson $\tilde{\xi} - Q\tilde{\xi} = \xi$. Soit $Y_k = \tilde{\xi}(X_k) - Q\tilde{\xi}(X_{k-1})$. Alors $(Y_k)_k$ est une suite d'accroissements de martingales, en outre Y_k est de carré \mathbb{P}_ν -intégrable car $\tilde{\xi} \in \mathcal{B} \subset \mathbb{L}^2(\nu)$. En posant $Z_n = \tilde{\xi}(X_1) - Q\tilde{\xi}(X_n)$, l'équation de Poisson permet d'écrire $S_n = \sum_{k=2}^n Y_k + Z_n$. Par ailleurs, la condition (F2), et le fait que la tribu engendrée par \mathcal{B} est par hypothèse égale à \mathcal{E} , entraînent que, sous la probabilité \mathbb{P}_ν , la chaîne stationnaire $(X_n)_{n \geq 0}$ est ergodique (voir par exemple [12] Chap. IX). Il vient que $(Y_k)_k$ est stationnaire et ergodique, par conséquent elle vérifie le t.l.c de Billingsley-Ibragimov [3] [14] avec σ^2 défini comme dans l'énoncé. Enfin, la suite $(\mathbb{E}_\nu[|Z_n|])_n$ est bornée, donc $(\frac{Z_n}{\sqrt{n}})_n$ converge en moyenne vers 0. D'où le résultat de l'énoncé. \square

• **Remarque 2.** L'hypothèse (F1) servira à établir que $Q(\cdot)$ vérifie, vis-à-vis de la semi-norme $\nu(|\cdot|)$, une propriété très faible de continuité en $t = 0$ (cf. (1) § IV.1) qui, adjointe

aux hypothèses (F2)(F3)(F4)(F5), permettra d'appliquer les résultats de [16]. Observons également que (F1) implique $\nu \in \mathcal{B}'$. En effet, pour $f \in \mathcal{B}$, on a $\nu(|f|) \leq [\nu(|f|^q)]^{\frac{1}{q}} \leq A \|f\|$.

• **Remarque 3.** *Une condition suffisante pour (F2).*

La condition (F2) exprime le fait que Q est quasi-compact à itérés bornés sur \mathcal{B} , et que 1 est valeur propre simple et l'unique valeur propre périphérique de Q . L'énoncé suivant est une conséquence du théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu [15], appliqué avec la semi-norme auxiliaire $\nu(|\cdot|)$.

Proposition II.3. *Si Q vérifie (F3) et s'il existe $N \in \mathbb{N}^*$, $\kappa < 1$ et $C \geq 0$ tels que*

$$(A) \quad \forall f \in \mathcal{B}, \quad \|Q^N f\| \leq \kappa^N \|f\| + C \nu(|f|),$$

alors Q est quasi-compact à itérés bornés sur \mathcal{B} . Si en outre 1 est valeur propre simple et l'unique valeur propre périphérique de Q , alors (F2) est vérifiée.

Preuve. Pour $n \geq 1$, on a, par invariance de ν , $\nu(|Q^n f|) \leq \nu(Q^n |f|) = \nu(|f|)$. Grâce à cette remarque et aux conditions (A) (F3), on déduit de [15] que Q est quasi-compact à itérés bornés sur \mathcal{B} . La dernière assertion est évidente. \square

Notons que la condition (A) correspond au cas $t = 0$ dans (F5). Par conséquent les conditions (F3) (F5) entraînent que Q est quasi-compact à itérés bornés sur \mathcal{B} . Les conditions ci-dessus sur la valeur propre 1 découlent le plus souvent d'hypothèses d'apériodicité et d'irréductibilité de la chaîne.

• **Remarque 4.** *Une condition plus générale pour (F3)-(F4).*

On a $Q(t)f = Q(e^{it\xi}f)$. Ainsi, par composition, sous la condition (F4), on a $Q(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$. De même, par composition, les conditions (F3) (F4) impliquent que l'image par $Q(t)$ de la boule unité de $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ est relativement compacte dans $(\mathcal{B}, \nu(|\cdot|))$.

En fait, pour la validité du théorème de Keller-Liverani au § IV.1, les hypothèses (F3)-(F4) peuvent être remplacées par la condition suivante plus faible :

Condition (F_{3,4}). *Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $Q(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$, et pour $t \in I$, où I est un intervalle ouvert contenant $t = 0$, $Q(t)(\{f \in \mathcal{B}, \|f\| \leq 1\})$ est relativement compacte dans $(\mathcal{B}, \nu(|\cdot|))$.*

Nous obtenons ainsi un énoncé un peu plus général que le théorème II.1, à savoir :

Théorème II.1'. *Les conclusions du théorème II.1 subsistent lorsque (\mathcal{F}) et $(\tilde{\mathcal{F}})$ sont remplacées respectivement par :*

(\mathcal{F}') : (F1) (F2) (F_{3,4}) (F5)

$(\tilde{\mathcal{F}}')$: obtenue comme $(\tilde{\mathcal{F}})$, avec (\mathcal{F}') à la place de (\mathcal{F}) .

• **Remarque 5.** *Une condition suffisante simple pour (F5) dans un cas particulier.*

Les inégalités (F5), dites de Doeblin-Fortet, font partie des hypothèses du théorème de Keller-Liverani (§ IV.1). La propriété suivante sera utile au paragraphe III.1 : les conditions (F2) et

$$(*) \quad \text{pour } f, g \in \mathcal{B} \text{ quelconques,} \quad |f| \leq |g| \Rightarrow \|f\| = \| |f| \| \leq \| |g| \| = \|g\| \quad ^{12}$$

¹²Un tel espace est appelé un treillis de Banach [25].

impliquent clairement (F4), puis (F5) avec $I = \mathbb{R}$.

En effet, de $|Q(t)^n f| \leq Q^n |f|$ et (F2), on déduit $\|Q(t)^n f\| \leq \|Q^n |f|\| \leq C \kappa_0^n \|f\| + \nu(|f|) \|\mathbf{1}\|$.

• **Remarque 6.** *Un critère de non-arithméticité.*

Rappelons que $A \in \mathcal{E}$ est dite Q -invariante si $Q(a, A) = 1$ pour tout $a \in A$. Supposons que, pour tout $x \in E$, l'application $f \mapsto f(x)$ soit dans \mathcal{B}' , et que le produit de deux fonctions bornées de \mathcal{B} appartienne à \mathcal{B} . Alors

Proposition II.4. *Sous l'hypothèse (F) [ou bien (F')], avec $I = \mathbb{R}$ dans (F5) [et (F_{3,4})], la fonction ξ est non-arithmétique s'il n'existe pas de réels $t \neq 0$, ni $A \in \mathcal{E}$ Q -invariant, ni $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, ni $w \in \mathcal{B}$ de module constant non nul sur A , tels que :*

$$\forall x \in A, \forall n \geq 1, \exp\left(it[\xi(x_1) + \dots + \xi(x_n)]\right)w(x_n) = \lambda^n w(x_0) \prod_{i=1}^n Q(x_{i-1}, dx_i) - p.s.$$

La preuve de cette proposition, dont une partie s'appuie sur le théorème de Keller-Liverani, est reportée au paragraphe IV.2.

• **Remarque 7.** Si $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$, l'hypothèse ($\tilde{\mathcal{F}}$) se réduit à : (Q, \mathcal{B}) vérifie (F) et, quand $t \rightarrow 0$, $Q(t)$ converge vers Q dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$. Comme le montreront les exemples, cette dernière condition n'est pas adaptée en général lorsque ξ est non bornée ; elle l'est en revanche si l'on choisit convenablement un espace $\tilde{\mathcal{B}}$ contenant strictement \mathcal{B} .

III. APPLICATIONS ET EXEMPLES

III.1. Application aux chaînes V -géométriquement ergodiques.

On suppose ici que (E, d) est un espace métrique non compact tel que toute boule fermée de E soit compacte. On munit E de sa tribu borélienne \mathcal{E} . Étant donnée une fonction $U > 0$ sur E , on notera \mathcal{B}_U l'espace des fonctions f mesurables sur E , à valeurs complexes, vérifiant

$$\|f\|_U = \sup\{U(x)^{-1}|f(x)|, x \in E\} < +\infty.$$

Soit $x_0 \in E$ quelconque, et soit V une fonction mesurable de E dans $[1, +\infty[$ telle que $V(x) \rightarrow +\infty$ quand $d(x, x_0) \rightarrow +\infty$. On suppose dans ce paragraphe que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne V -géométriquement ergodique. Rappelons que cette propriété est par définition satisfaite s'il existe une probabilité Q -invariante, ν , telle que $\nu(V) < +\infty$, si $\|QV\|_V < +\infty$, et enfin si Q vérifie la condition (F2) sur \mathcal{B}_V . Des critères d'ergodicité V -géométrique sont présentés dans [18] (chap. 16).

Soit λ une mesure positive σ -finie sur E . En vue d'assurer la condition (F3) (lemme III.1), on suppose que Q est de la forme $Q(x, dy) = K(x, y)d\lambda(y)$. Enfin on suppose que $(X_n)_{n \geq 0}$ est λ -irréductible et apériodique [18]. Ces deux conditions sont par exemple satisfaites si $K(x, y) > 0$ pour tout $x \in E$ et pour λ -presque tout $y \in E$.

Proposition III.1. *Soit $W = \sqrt{V}$. Si $\xi \in \mathcal{B}_W$, alors $(\xi(X_n))_{n \geq 0}$ vérifie le t.l.c de la proposition II.2. Si en outre $\sigma^2 > 0$ et $\mu_0(V) < +\infty$, alors avec $\mathcal{B} = \mathcal{B}_W$, on a (TLC), puis (TLL) si ξ est non-arithmétique (le critère de non-arithméticité de la remarque II.6 s'applique ici).*

Dans la preuve ci-dessous, nous montrons que Q vérifie l'hypothèse $(\tilde{\mathcal{F}})$ avec $\mathcal{B} = \mathcal{B}_W$ et $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_V$. En particulier nous verrons que $Q(t) \rightarrow Q$ quand $t \rightarrow 0$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V)$; on observera que cette propriété n'est pas satisfaite a priori dans $\mathcal{L}(\mathcal{B}_W)$.

Preuve. Comme $\nu(V) < +\infty$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_W$ s'envoie continûment dans $\mathbb{L}^2(\nu)$ (cf. (F1) avec $q = 2$). Par ailleurs $(X_n)_n$ est aussi W -géométriquement ergodique, c'est-à-dire Q vérifie (F2) sur $\mathcal{B} = \mathcal{B}_W$ [18] (Lemme 15.2.9 et Théorème 16.0.1). Par conséquent, si $\xi \in \mathcal{B}_W$, la proposition II.2 s'applique. En outre comme \mathcal{B}_W vérifie la propriété $(*)$ (Rq. II.5), on a (F4), et (F5) avec $I = \mathbb{R}$, sur \mathcal{B}_W .

Soit $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_V$. Par hypothèse Q vérifie (F2) sur cet espace. De plus, en utilisant l'inégalité $|e^{it\xi} - 1| \leq |t| |\xi|$, on a pour $f \in \mathcal{B}_W$:

$$|Q(t)f - Qf| \leq Q\left(|e^{it\xi} - 1| |f|\right) \leq |t| Q(|\xi|W) \|f\|_W \leq |t| \|\xi\|_W Q(W^2) \|f\|_W,$$

d'où $\|Q(t)f - Qf\|_V \leq |t| \|\xi\|_W \|Q\|_V \|f\|_W$. Il reste à établir que Q vérifie (F3) sur \mathcal{B}_W .

Commençons par prouver que Q est un opérateur compact de $\mathbb{L}^\infty(\lambda)$ dans $\mathbb{L}^1(\nu)$. Le noyau K est clairement intégrable pour la mesure produit $\nu \otimes \lambda$, par conséquent K peut être approché dans $\mathbb{L}^1(\nu \otimes \lambda)$ par des combinaisons linéaires finies de fonctions indicatrices $1_{A_i \times B_j}$, avec $A_i, B_j \in \mathcal{E}$. Il vient que Q est limite, dans l'espace des opérateurs bornés de $\mathbb{L}^\infty(\lambda)$ dans $\mathbb{L}^1(\nu)$, d'opérateurs de rang fini. Ceci démontre le résultat annoncé.

Désignons maintenant par \mathcal{B}_0 l'espace des fonctions mesurables bornées sur E , muni de la norme de la convergence uniforme. Comme \mathcal{B}_0 s'envoie continûment dans $\mathbb{L}^\infty(\lambda)$, il vient que Q est compact de \mathcal{B}_0 dans $\mathbb{L}^1(\nu)$. On peut maintenant établir (F3) :

Lemme III.1. $Q(\{f \in \mathcal{B}_W, \|f\|_W \leq 1\})$ est relativement compacte dans $(\mathcal{B}_W, \nu(|\cdot|))$.

Preuve. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de \mathcal{B}_W telles que $\|f_n\|_W \leq 1$. On pose $g_n = Qf_n$ et, pour $k \geq 1$, $f_n^{(k)} = f_n 1_{|f_n| \leq k}$ et $g_n^{(k)} = Qf_n^{(k)}$. Pour k fixé, $(f_n^{(k)})_n$ est une suite de fonctions qui sont toutes bornées sur E par k . Par extraction successive de sous-suites, il existe donc des applications $\phi_i, i \geq 1$, strictement croissantes de \mathbb{N}^* dans \mathbb{N}^* telles que, pour tout $k \geq 1$, la suite $(g_{\phi_1 \circ \dots \circ \phi_k(n)})_n$ converge dans $\mathbb{L}^1(\nu)$. Posons $\psi_\ell = \phi_1 \circ \dots \circ \phi_\ell$. Pour $q, p \geq k$, on a

$$|g_{\psi_q(q)} - g_{\psi_p(p)}| \leq Q|f_{\psi_q(q)} - f_{\psi_q(q)}^{(k)}| + |g_{\psi_q(q)}^{(k)} - g_{\psi_p(p)}^{(k)}| + Q|f_{\psi_p(p)}^{(k)} - f_{\psi_p(p)}|.$$

Or, pour tout $n \geq 1$, on a $\nu(Q|f_n - f_n^{(k)}|) = \nu(|f_n - f_n^{(k)}|) = \nu(|f_n| 1_{|f_n| > k}) \leq \nu(W 1_{|W| > k})$ car ν est invariante et $|f_n| \leq W$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\nu(W) < +\infty$, on a $\nu(W 1_{|W| > k}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ pour k suffisamment grand désormais fixé. Soit $N \geq 1$ tel que, pour $\ell, m \geq N$, on ait

$$\nu(|g_{\psi_k(\ell)}^{(k)} - g_{\psi_k(m)}^{(k)}|) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour $q \geq k$ et $p \geq k$, les entiers $\psi_q(q)$ et $\psi_p(p)$ sont de la forme $\psi_k(n_q)$ et $\psi_k(n_p)$ avec $n_q \geq q$ et $n_p \geq p$. On conclut de tout ce qui précède que, pour $q, p \geq \max\{k, N\}$, on a

$$\nu(|g_{\psi_q(q)} - g_{\psi_p(p)}|) \leq \varepsilon.$$

Il vient que la suite $(g_{\psi_n(n)})_n$ converge dans $\mathbb{L}^1(\nu)$. Soit g une fonction ν -intégrable sur E telle que $\lim_n \nu(|g_{\psi_n(n)} - g|) = 0$. Comme $|g_k(x)| \leq \|Q\|_W W(x)$ pour tous $x \in E$ et $k \geq 1$, il existe une partie A dans \mathcal{E} telle que $\nu(A) = 1$ et $|g(x)| \leq \|Q\|_W W(x)$ pour tout $x \in A$. Posons $h(x) = g(x)$ si $x \in A$, et $h(x) = 0$ sinon. Alors $h \in \mathcal{B}_W$, et $\lim_n \nu(|g_{\psi_n(n)} - h|) = 0$. \square

III.1.1. Exemple d'une marche aléatoire.

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ la marche aléatoire sur $E = \mathbb{N}$ définie par la donnée d'une v.a X_0 , puis, pour $n \geq 1$, par $X_n = \max\{0, X_{n-1} + Y_n\}$, où $(Y_n)_{n \geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. à valeurs dans \mathbb{Z} , indépendantes de X_0 . On trouvera dans [18] des énoncés de t.l.c pour $(X_n)_n$ sous des hypothèses très générales. Nous nous intéressons ici uniquement au théorème local. Soit $\pi_k = P([Y_1 = k])$, $k \in \mathbb{Z}$. On suppose qu'il existe $\gamma > 0$ tel que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k \pi_k < 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k \geq 0} \pi_k e^{\gamma k} < +\infty.$$

Sous ces hypothèses, un théorème local a été établi dans [26] pour ξ bornée. En fait cet énoncé est vérifié pour une classe de fonctions ξ beaucoup plus générale. En effet, pour $s > 0$ et $j \in \mathbb{N}$, posons $V_s(j) = e^{sj}$. Alors il existe $0 < \gamma_0 \leq \gamma$ tel que $(X_n)_{n \geq 0}$ soit V_{γ_0} -géométriquement ergodique, voir [18] (p. 389). Afin d'assurer l'irréductibilité au sens de [18], supposons que $\pi_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (on peut bien sûr affaiblir cette condition).

Sous ces hypothèses, la proposition III.1 s'applique avec $V = V_{\gamma_0}$.

III.1.2. Exemple des modèles autorégressifs fonctionnels.

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ un processus autorégressif fonctionnel sur \mathbb{R}^d défini par la donnée d'une v.a X_0 sur \mathbb{R}^d , puis par $X_n = \phi(X_{n-1}) + Y_n$ pour $n \geq 1$, où $(Y_n)_{n \geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d à valeurs dans \mathbb{R}^d , indépendantes de X_0 , et où ϕ est une fonction de l'espace \mathbb{R}^d dans lui-même. Supposons que la loi commune des v.a Y_n admette une densité $p > 0$ et un moment d'ordre $\gamma_0 > 0$, et que ϕ soit continue et telle que $\limsup (\|x\|^{-1} \|\phi(x)\|) < 1$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$.

Sous ces hypothèses, la proposition III.1 s'applique avec $V(x) = (1 + \|x\|)^{\gamma_0}$.

En effet le noyau Q est défini par $(Qf)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\phi(x) + y)p(y)dy$. Comme $p > 0$, $(X_n)_{n \geq 0}$ est apériodique et Lebesgue-irréductible. En outre, grâce au théorème de convergence dominée, on a $\limsup V(x)^{-1} QV(x) < 1$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$. Des résultats de [18] (Prop. 6.2.8 et Th. 16.0.1), on déduit que $(X_n)_{n \geq 0}$ est V -géométriquement ergodique. Enfin on a clairement $Q(x, dy) = K(x, y)dy$ avec $K(x, y) = p(y - \phi(x))$.

Dans le paragraphe suivant, en renforçant les conditions de régularité sur ϕ et ξ , on généralisera l'énoncé précédent au cas où Y_k ne possède pas de densité.

III.2. Application aux Modèles itératifs Lipschitziens.

(E, d) est à nouveau un espace métrique non compact dont toute boule fermée est compacte, et x_0 est un point quelconque de E . On désigne par G un semi-groupe de transformations lipschitziennes de E , et par \mathcal{G} une tribu sur G . On suppose que l'action de G sur E est mesurable.

Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. à valeurs dans G . On note π leur loi commune. Étant donnée une variable aléatoire X_0 à valeurs dans E , de loi μ_0 , indépendante des v.a Y_n , on

considère la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ définie pour $n \geq 1$ par

$$X_n = Y_n X_{n-1}, \quad \text{soit encore} \quad X_n = Y_n \cdots Y_1 X_0.$$

Il est facile de voir que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov de probabilité de transition définie par

$$(Qf)(x) = \int_G f(gx) d\pi(g).$$

Ce cadre contient clairement celui des modèles itératifs Lipschitziens définis par exemple dans [6]. Par ailleurs, il comprend aussi le cas des itérations α -Hölderiennes, $\alpha \in]0, 1]$, car $d(\cdot, \cdot)^\alpha$ est une distance sur E .

Nous donnons maintenant deux exemples d'applications du théorème II.1'. Le premier, présenté dans le cadre général précédent, repose sur un t.l.c établi par M. Benda [2] dans le cas où ξ est uniformément lipschitzienne. Le second, qui s'inscrit dans l'étude des produits de matrices aléatoires positives, est fondé sur un t.l.c démontré par H. Hennion [11].

Pour ces deux exemples, la propriété (TLL), lorsqu'elle est établie à l'aide du théorème standard de perturbation d'opérateurs, requiert des conditions de moments exponentiels pour la fonction $\delta(\cdot)$ définie ci-dessous, voir [12]. Dans l'article [13], qui utilise déjà les résultats de [16], ces conditions ont été remplacées par des hypothèses de moments polynomiaux ; celles-ci sont sensiblement améliorées dans les propositions III.2-3 ci-dessous.

Pour $g \in G$, on utilisera dans la suite les notations suivantes

$$c(g) = \sup \left\{ \frac{d(gx, gy)}{d(x, y)}, x, y \in E, x \neq y \right\} \quad \text{et} \quad \delta(g) = 1 + c(g) + d(gx_0, x_0).$$

Exemple III.2.1. *Cas où ξ est uniformément lipschitzienne.*

On suppose ici qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que l'on ait, pour $x, y \in E$,

$$|\xi(x) - \xi(y)| \leq C d(x, y).$$

Il est établi dans [2] que, sous les hypothèses

$$\int_G c(g)^2 d\pi(g) < 1 \quad \text{et} \quad \int_G d(gx_0, x_0)^2 d\pi(g) < +\infty,$$

la suite $(\frac{S_n}{\sqrt{n}})_n$ converge en loi vers une gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Nous renforçons ces hypothèses en supposant en outre que, pour un certain $\varepsilon > 0$ et un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_G \delta(g)^{2+\frac{\varepsilon}{2}} d\pi(g) < +\infty, \quad \int_G c(g) \delta(g)^{2+\varepsilon} d\pi(g) < +\infty, \quad \int_G c(g) \max\{c(g), 1\}^{2+\varepsilon} d\pi^{*n_0}(g) < 1,$$

où π^{*n_0} est la loi de la v.a $Y_{n_0} \cdots Y_1$.

Les propriétés (TLC) et (TLL) dans la proposition ci-dessous peuvent être appliquées à $f \geq 0$ sur E telle que $|f(x) - f(y)| \leq M d(x, y) (1 + d(x, x_0)) (1 + d(y, x_0))$ pour tous $x, y \in E$, avec M indépendant de x, y .

Proposition III.2. *Sous ces hypothèses, il existe une unique probabilité Q -invariante, ν , et l'on a $\nu(d(\cdot, x_0)^{2+\frac{\varepsilon}{2}}) < +\infty$. Si en outre $\sigma^2 > 0$ et $\mu_0(d(\cdot, x_0)^{2+\frac{\varepsilon}{2}}) < +\infty$, alors on a (TLC), puis (TLL) si ξ est non-arithmétique.*

Le critère de non-arithméticité de la remarque II.6 s'applique relativement à l'espace $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$ défini ci-dessous (cf. [13], lemmes 9.1' et 9.1'').

Exemple : *retour sur les modèles autorégressifs fonctionnels.*

Soit ϕ une contraction stricte sur \mathbb{R}^d , et soit $(X_n)_{n \geq 0}$ le processus autorégressif fonctionnel associé (voir Ex. III.1.2). La loi commune π des Y_k est supposée ici quelconque.

$(X_n)_n$ est clairement défini selon le modèle ci-dessus, avec : $G = \mathbb{R}^d$, $gx = \phi(x) + g$, donc $c(g)$ est la constante de contraction de ϕ , puis avec $x_0 = 0$, et $d(x, y) = \|x - y\|$ où $\|\cdot\|$ est une norme quelconque sur \mathbb{R}^d .

On dispose alors du résultat suivant : *si ξ est uniformément Lipschitzienne et si π a un moment d'ordre $2 + \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$, alors la proposition III.2 s'applique.*

Avant de présenter la preuve de la proposition III.2, nous définissons les espaces \mathcal{B}_γ sur lesquels on fera opérer Q , et nous énonçons un lemme qui servira également dans l'exemple III.2.2.

Posons $p(x) = 1 + d(x, x_0)$, et, pour $\gamma > 0$, désignons par \mathcal{B}_γ l'espace des fonctions numériques f sur E telles que

$$m_\gamma(f) = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)p(x)^\gamma p(y)^\gamma}, x, y \in E, x \neq y \right\} < +\infty.$$

Pour $f \in \mathcal{B}_\gamma$, il est clair que $|f|_\gamma = \sup_{x \in E} \frac{|f(x)|}{p(x)^{\gamma+1}} < +\infty$. On pose

$$\|f\|_\gamma = m_\gamma(f) + |f|_\gamma.$$

On montre aisément que $(\mathcal{B}_\gamma, \|\cdot\|_\gamma)$ est un espace de Banach. On notera que la condition imposée à f dans les propriétés (TLC) et (TLL) de la proposition III.2 est $f \in \mathcal{B}_1$, et que, si μ est une probabilité sur E telle que $\mu(d(\cdot, x_0)^{\gamma+1}) < +\infty$, alors $\mu \in \mathcal{B}'_\gamma$.

Soit $\bar{\xi}$ une fonction réelle mesurable définie sur $G \times E$. On suppose qu'il existe une fonction S mesurable sur E telle que l'on ait, pour tous $x, y \in E$ et $g \in G$,

$$(S) \quad |\bar{\xi}(g, x) - \bar{\xi}(g, y)| \leq S(g) d(x, y).$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$P(t)f(x) = \int_G e^{it\bar{\xi}(g, x)} f(gx) d\pi(g)$$

(on notera que $P(t)$ n'est pas a priori un noyau de Fourier associé à Q). Enfin, pour $\eta \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$\mathcal{M}_\eta = \int_G \delta(g)^\eta d\pi(g), \quad \mathcal{M}'_\eta = \int_G c(g) \delta(g)^{\eta-1} d\pi(g), \quad \mathcal{C}_\eta^{(n)} = \int_G c(g) \max\{c(g), 1\}^{\eta-1} d\pi^{*n}(g).$$

On suppose pour le lemme suivant qu'il existe un réel $\gamma_0 > 1$ et un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que l'on ait $\mathcal{M}_{\gamma_0+1} < +\infty$, $\mathcal{M}'_{2\gamma_0+1} < +\infty$, puis $\mathcal{C}_{2\gamma_0+1}^{(n_0)} < 1$, et enfin que $\int_G S(g) \delta(g)^2 d\pi(g) < +\infty$.

Lemme III.2. *Sous ces hypothèses, il existe une unique probabilité Q -invariante, ν , et l'on a $\int_E d(x, x_0)^{\gamma_0+1} d\nu(x) < +\infty$. En outre le triplet $(\nu, Q, P(\cdot))$ vérifie (\mathcal{F}') ¹³ relativement aux espaces $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$ et $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_{\gamma_0}$.*

Le lemme III.2 est une conséquence directe de certains résultats établis dans [13].¹⁴

Preuve de la proposition III.2. Soit $\bar{\xi}(g, x) = \xi(gx)$. Observons que les noyaux $P(t)$ coïncident ici avec les noyaux de Fourier $Q(t)$. Soit $\gamma_0 = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$. Les conditions de la proposition III.2 s'écrivent alors $\mathcal{M}_{\gamma_0+1} < +\infty$, $\mathcal{M}'_{2\gamma_0+1} < +\infty$, $\mathcal{C}_{2\gamma_0+1}^{(n_0)} < 1$. De plus, comme ξ est uniformément Lipschitzienne, $\bar{\xi}$ vérifie (\mathcal{S}) avec $S(g) = C c(g)$. Il vient $\int_G S(g)\delta(g)^2 d\pi(g) \leq C \int_G c(g)\delta(g)^{2\gamma_0} d\pi(g) = \mathcal{M}'_{2\gamma_0+1} < +\infty$. Ainsi le lemme III.2 s'applique. Comme la propriété (\mathcal{P}) est assurée grâce à [2], la proposition III.2 découle du théorème II.1'. \square

Exemple III.2.2. Produits de matrices aléatoires positives.

G est ici le semi-groupe des matrices d'ordre d , à coefficients ≥ 0 , dont chaque ligne et chaque colonne contiennent un coefficient > 0 , et E est l'ensemble défini par

$$E = \{x \in (\mathbb{R}_+^*)^d, \|x\| = 1\},$$

où l'on a posé $\|x\| = \sum_{k=1}^d |x_k|$. Pour $g \in G$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on note $g(x)$ l'image de x par g , puis g^* la matrice transposée de g , et enfin

$$\|g\| = \sup\{\|g(y)\| : y \in E\} \quad \text{et} \quad v(g) = \inf\{\|g(y)\| : y \in E\}.$$

Soit $(Y_k)_{k \geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d à valeurs dans G , de loi commune notée π , et enfin soit $R_n = Y_n \cdots Y_1$, avec la convention $R_0 = Id_E$. H. Hennion a établi dans [11] que, si

$$\int_G \left(|\ln \|g^*\|| + |\ln v(g^*)| \right)^2 d\pi(g) < +\infty,$$

et si, pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}^*$, le support de la loi de la v.a R_{n_0} contient une matrice à coefficients > 0 , alors il existe $m_1 \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$ tels que, pour tout $y \in E$, la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} (\ln \|R_n(y)\| - nm_1) \right)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Soit X_0 une v.a. à valeurs dans E , de loi μ_0 quelconque, indépendante des v.a Y_k . Il est facile de voir que le t.l.c précédent s'applique encore à $R_n(X_0)$. Comme dans [11] et [13], nous considérons sur E la distance de Hilbert, notée d_H .

¹³Les hypothèses fonctionnelles du paragraphe II ont été définies relativement au noyaux de Fourier $Q(t)$, mais elles conservent un sens évident lorsque ceux-ci sont remplacés par des opérateurs du type $P(t)$.

¹⁴Plus précisément :

- (i) L'existence de ν , son unicité et la condition de moment, sont établis dans [13] Th.I. Il vient que \mathcal{B}_1 s'envoie continûment dans $\mathbb{L}^q(\nu)$, avec $q = \frac{\gamma_0+1}{2}$, et $\nu \in \mathcal{B}'_\gamma$ pour tout $0 < \gamma \leq \gamma_0$.
- (ii) Q vérifie (F2) sur \mathcal{B}_γ pour tout $0 < \gamma \leq \gamma_0$ ([13] Th. 5.5).
- (iii) L'injection canonique de $(\mathcal{B}_1, \|\cdot\|_1)$ dans $(\mathcal{B}_1, \nu(|\cdot|))$ est compacte ([13] Lemme 5.4) et pour $t \in \mathbb{R}$, $P(t)$ opère continûment sur \mathcal{B}_1 ([13] Lemme 6.1). Donc $P(t)$ est compact de $(\mathcal{B}_1, \|\cdot\|_1)$ dans $(\mathcal{B}_1, \nu(|\cdot|))$.
- (iv) $P(\cdot)$ vérifie la condition (F5) sur \mathcal{B}_1 ([13] Lemme 6.1).
- (v) Si $\gamma_0 > 1$, alors quand $t \rightarrow 0$, $Q(t)$ converge vers Q dans $\mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_{\gamma_0})$ ([13] Lemme 6.2).

Enfin nous renforçons les hypothèses précédentes en supposant que, pour un certain $\varepsilon > 0$,

$$\int_G \left(|\ln \|g^*\|| + |\ln v(g^*)| \right)^{2+\varepsilon} d\pi(g) < +\infty,$$

et que, pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}^*$, le support de la loi de R_{n_0} contient deux matrices g_1, g_2 à coefficients > 0 , dont les rayons spectraux respectifs ρ_1, ρ_2 vérifient $\ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \notin \mathbb{Q}$.

L'action de G sur E est définie par $gx = \frac{g(x)}{\|g(x)\|}$.

Proposition III.3. *Sous ces hypothèses il existe sur E une unique probabilité Q -invariante, ν , et l'on a $\nu(d_H(\cdot, x_0)^{2+\frac{\varepsilon}{2}}) < +\infty$. Si en outre le réel σ^2 ci-dessus est > 0 et si l'on a $\mu_0(d_H(\cdot, x_0)^{2+\frac{\varepsilon}{2}}) < +\infty$, alors on a pour toute fonction réelle ψ continue bornée sur \mathbb{R} , à support compact*

$$\lim_n \sigma \sqrt{2\pi n} \mathbb{E} \left[\psi(\ln \|R_n(X_0)\| - nm_1) \right] = L(\psi).$$

Preuve. Vis-à-vis de l'action de G sur E définie ci-dessus, la fonction $a(g, x) = \ln \|g(x)\|$ est un cocycle additif :

$$a(gg', x) = a(g, g'x) + a(g', x).$$

Par conséquent, en posant $\bar{\xi}(g, x) = a(g, x) - m_1$, il vient que

$$(**) \quad \ln \|R_n(X_0)\| - nm_1 = \sum_{k=1}^n \bar{\xi}(Y_k, R_{k-1}X_0) = \sum_{k=1}^n \bar{\xi}(\bar{X}_k),$$

où $(\bar{X}_n)_{n \geq 0}$ est la chaîne de Markov définie sur l'espace $\bar{E} = G \times E$ par $\bar{X}_0 = (Id_E, X_0)$, puis par $\bar{X}_n = (Y_n, R_{n-1}X_0)$; sa probabilité de transition est $\bar{Q}F(g, x) = \int_G F(h, gx) d\pi(h)$.

La conclusion de la proposition III.3 correspond donc à la propriété (TLL) pour la chaîne $(\bar{X}_n)_{n \geq 0}$ et la fonction $\bar{\xi}$.

Nous allons démontrer qu'il existe sur \bar{E} une unique probabilité \bar{Q} -invariante, $\bar{\nu}$, puis que \bar{Q} et les noyaux de Fourier $\bar{Q}(t)$ associés à \bar{Q} et $\bar{\xi}$ vérifient (\mathcal{F}') vis-à-vis d'espaces $\bar{\mathcal{B}}_1$ et $\bar{\mathcal{B}}_{1+\frac{\varepsilon}{2}}$ construits plus bas. À cet effet nous conservons les notations du lemme III.2 en associant à π et $\bar{\xi}$ les noyaux $Qf(x) = \int_G f(gx) d\pi(g)$ et $P(t)f(x) = \int_G e^{it\bar{\xi}(g,x)} f(gx) d\pi(g)$, puis en considérant les espaces \mathcal{B}_γ définis ici avec $d = d_H$.

Lemme III.3. *Les hypothèses de la proposition III.3 impliquent celles du lemme III.2 avec $\gamma_0 = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$.*

Admettons pour le moment ce lemme, et indiquons comment les propriétés du lemme III.2, vérifiées pour $(Q, P(\cdot))$ s'étendent à $(\bar{Q}, \bar{Q}(\cdot))$. Tout d'abord pour passer de l'espace d'états E à \bar{E} , nous posons $Jf(g, x) = f(gx)$ pour f borélienne sur E , $x \in E$, $g \in G$, et nous définissons l'espace $\bar{\mathcal{B}}_\gamma = J(\mathcal{B}_\gamma)$, muni de la norme $\|Jf\|_\gamma = \|f\|_\gamma$. Il est facile de voir que $\bar{\mathcal{B}}_\gamma$ est un espace de Banach, et que \bar{Q} et $\bar{Q}(t)$ vérifient, pour tous $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\bar{Q}^n \circ J = J \circ Q^n \quad \text{et} \quad \bar{Q}(t)^n \circ J = J \circ P(t)^n.$$

On voit aisément que la probabilité $\bar{\nu} = \pi \times \nu$ est \bar{Q} -invariante ([12] Cor. X.8). Comme ν a un moment d'ordre $2 + \frac{\varepsilon}{2}$ (lemme III.2), on a $\nu \in (\mathcal{B}_{1+\frac{\varepsilon}{2}})'$, et il vient que $\bar{\nu}$ définit une forme linéaire sur $\bar{\mathcal{B}}_{1+\frac{\varepsilon}{2}}$. De la même façon, on peut montrer, grâce à la condition de moment sur μ_0 , que la loi de $\bar{X}_0 = (Id_E, X_0)$ définit une forme linéaire continue sur $\bar{\mathcal{B}}_{1+\frac{\varepsilon}{2}}$. En outre, grâce aux formules ci-dessus, il est très facile de voir que $(\widetilde{\mathcal{F}'})$ se transpose à $(\bar{\nu}, \bar{Q}, \bar{Q}(t))$ vis-à-vis des espaces $\bar{\mathcal{B}}_1$ et $\bar{\mathcal{B}}_{1+\frac{\varepsilon}{2}}$.

Enfin l'hypothèse sur les matrices g_1, g_2 assure que $\bar{\xi}$ vérifie le critère de non-arithméticité de la proposition II.4 (voir [13] §.3.3), et en vertu de (***) et des résultats de [11], la suite $(\bar{\xi}(\bar{X}_k))_k$ vérifie l'hypothèse (\mathcal{P}) lorsque le réel σ^2 de [11] est > 0 . La proposition III.3 découle alors du théorème II.1'.

Preuve du lemme III.3. Les espaces \mathcal{B}_γ et les nombres $c(g)$, $\delta(g)$ sont ici définis avec la distance de Hilbert $d = d_H$. Grâce aux propriétés de d_H , on sait que $c(\cdot) \leq 1$, puis que $c(g) < 1$ si les coefficients de g sont > 0 , voir [1] [11]. Par hypothèse, une telle matrice existe dans le support de la loi de R_{n_0} , et ceci assure que $\mathcal{C}_\eta^{(n_0)} < 1$ pour tout $\eta \geq 1$.

La condition intégrale de la proposition III.3 entraîne $\mathcal{M}_{2+\varepsilon} < +\infty$ (voir [13] § 3.3). Avec $\gamma_0 = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ il vient $\mathcal{M}_{\gamma_0+1} = \mathcal{M}_{2+\frac{\varepsilon}{2}} < +\infty$, puis $\mathcal{M}'_{2\gamma_0+1} \leq \mathcal{M}_{2+\varepsilon} < +\infty$ car $c(\cdot) \leq 1$. En outre on montre dans [13] (§ 3.3) que la fonction $\bar{\xi}$ ci-dessus vérifie (\mathcal{S}) avec $S = 1$, d'où $\int_G S(g)\delta(g)^2 d\pi(g) = \int_G \delta(g)^2 d\pi(g) \leq \mathcal{M}_{2+\varepsilon} < +\infty$. Les conditions du lemme III.2 sont donc satisfaites. \square

IV. PREUVE DES ÉNONCÉS II.1, II.1', ET II.4

IV.1. Théorème de Keller-Liverani.

Pour simplifier nous présentons les résultats de [16] dans le cadre de ce papier, à savoir : la famille d'opérateurs est donnée par les noyaux de Fourier $Q(t)$, et la semi-norme auxiliaire sur \mathcal{B} est $\nu(|\cdot|)$.¹⁵

Théorème (K-L) [16]. *Supposons que Q vérifie (F2), et que les hypothèses (i)-(iv) suivantes soient satisfaites :*

- (i) Pour $t \in \mathbb{R}$, $Q(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$, et pour $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{B}$, on a $\nu(|Q(t)^n f|) \leq \nu(|f|)$
- (ii) $Q(\cdot)$ vérifie la condition (F5) sur un certain intervalle ouvert I contenant $t = 0$.
- (iii) Pour $t \in I$, le rayon spectral essentiel de $Q(t)$ est \leq au réel κ intervenant dans (F5).
- (iv) Il existe sur I une fonction réelle continue $\varepsilon(\cdot)$, nulle en $t = 0$, telle que

$$(1) \quad \nu\left(|Q(t)f - Qf|\right) \leq \varepsilon(t) \|f\|.$$

Alors il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ centré en $t = 0$, et des applications $\lambda(\cdot)$, $v(\cdot)$, $\phi(\cdot)$ et $N(\cdot)$ à valeurs respectivement dans \mathbb{C} , \mathcal{B} , \mathcal{B}' et $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ tels que l'on ait, pour $t \in J$, $n \geq 1$, et $f \in \mathcal{B}$,

$$Q(t)^n f = \lambda(t)^n \langle \phi(t), f \rangle v(t) + N(t)^n f,$$

avec en outre les propriétés suivantes :

- (a) $\langle \phi(t), v(t) \rangle = 1$, $\phi(t)N(t) = 0$, $N(t)v(t) = 0$, et $\|N(t)^n\| \leq C\kappa^n$, où C est une constante

¹⁵Les résultats de [16] sont présentés avec une norme auxiliaire $|\cdot|$ sur \mathcal{B} vérifiant $|\cdot| \leq \|\cdot\|$. Il est facile de voir que ceux-ci subsistent lorsque $|\cdot|$ est remplacée par une semi-norme.

indépendante de $t \in J$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) = 1$, $\langle \nu, v(t) \rangle = 1$, $\lim_{t \rightarrow 0} \langle \nu, |v(t) - \mathbf{1}| \rangle = 0$, et il existe une fonction réelle continue $\vartheta(\cdot)$, nulle en $t = 0$, telle que l'on ait pour $f \in \mathcal{B}$, $|\langle \phi(t), f \rangle - \nu(f)| \leq \vartheta(t) \|f\|$.

La décomposition spectrale du théorème (K-L), puis l'assertion (a) et la 1ère propriété de (b), sont présentées dans les énoncés de [16]. Les autres points de (b) sont des conséquences assez directes de résultats intermédiaires contenus dans [16] dont nous rappelons les principaux arguments.

D'après [16], il existe une fonction réelle continue $\vartheta(\cdot)$, nulle en $t = 0$, telle que l'on ait, pour tout $f \in \mathcal{B}$, $|\langle \nu, |\Pi(t)f - \Pi(0)f| \rangle| \leq \vartheta(t) \|f\|$, où $\Pi(t)$ est un projecteur de rang 1 sur $\text{Ker}(Q(t) - \lambda(t))$ tel que $\Pi(0)f = \nu(f)\mathbf{1}$. De plus l'élément propre dual $\phi(t)$ peut être défini par $\phi(t) = \Pi(t)^*\nu$, tandis que $v(t) = \langle \nu, \Pi(t)\mathbf{1} \rangle^{-1} \Pi(t)\mathbf{1}$. La 2ième assertion de (b) en résulte. La 3ième est une conséquence de $\lim \langle \nu, |\Pi(t)\mathbf{1} - \Pi(0)\mathbf{1}| \rangle = 0$ et $\Pi(0)\mathbf{1} = \mathbf{1}$. Enfin on déduit la 4ième de l'égalité $\langle \phi(t), f \rangle = \langle \nu, \Pi(t)f \rangle$.

Le lemme suivant montre que le théorème précédent s'applique sous les conditions du § II.

Lemme IV.1. *Sous les hypothèses (F1) (F3) (F4) (F5) [ou bien (F1) (F_{3,4}) (F5)], cf. Rq. II.4], les conditions (i)-(iv) du théorème (K-L) sont satisfaites.*

En conséquence, sous les hypothèses (F) ou (F'), les conclusions du théorème (K-L) sont vérifiées ; en outre la fonction $\lambda(\cdot)$ est continue sur J .

Preuve. Soit $t \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$. On a $|Q(t)^n f| \leq Q^n |f|$, donc $\nu(|Q(t)^n f|) \leq \nu(Q^n |f|) = \nu(|f|)$, d'où le second point de (i) (cf. Rq. II.4 pour le 1er point de (i)). La propriété (ii) correspond à (F5). Pour prouver (iii), observons que, grâce à (F3) (F4) [ou bien (F_{3,4})], $Q(t)$ est compact de $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ dans $(\mathcal{B}, \nu(|\cdot|))$ (Rq. II.4). De (F5), on déduit alors du théorème de Hennion [10], fondé sur la formule de Nussbaum [22], que le rayon spectral essentiel de $Q(t)$ est $\leq \kappa$. Pour prouver (iv), notons p le nombre conjugué du réel q de la condition (F1). En utilisant l'invariance de ν , l'inégalité de Hölder et la propriété (F1), on a, pour $f \in \mathcal{B}$ et $t_0, h \in \mathbb{R}$

$$(1') \quad \nu\left(|Q(t_0 + h)f - Q(t_0)f|\right) \leq \nu\left(Q(|e^{ih\xi} - 1||f|)\right) = \nu(|e^{ih\xi} - 1||f|) \leq A\varepsilon(h) \|f\|$$

avec $\varepsilon(h) = (\nu(|e^{ih\xi} - 1|^p))^{\frac{1}{p}}$ qui tend vers 0 avec h en vertu du théorème de Lebesgue.

Pour établir la continuité de $\lambda(\cdot)$ sur l'intervalle J , il suffit d'observer que, pour $t_0 \in J$ quelconque, la famille $\{Q(t), t \in \mathbb{R}\}$ vérifie les conditions (i)-(iii) du théorème de Keller-Liverani relativement à l'intervalle J . Ceci, adjoint à la propriété (1'), permet d'appliquer à nouveau le théorème de Keller-Liverani, mais cette fois-ci au voisinage de $t = t_0$; il vient que $\lambda(\cdot)$ est continue en t_0 . \square

IV.2. Preuve de la proposition II.4.

La preuve de la proposition II.4 découle des points 1-3 ci-dessous. On désignera par K une partie compacte quelconque de \mathbb{R}^* .

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a $r(Q(t)) < 1$.

En itérant l'inégalité de Doeblin-Fortet (F5) et en utilisant le fait que $\nu(|Q(t)^n f|) \leq \nu(|f|)$, il vient que les itérés de $Q(t)^N$ sont uniformément bornés sur $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$. Donc $r(Q(t)) \leq 1$.

Par ailleurs, si l'on avait $r(Q(t)) = 1$, alors $Q(t)$ serait quasi-compact (cf. preuve de (iii) du th. (K-L)), et il existerait donc une fonction propre $w \in \mathcal{B}$ associée à $\lambda \in \mathbb{C}$ de module 1, ce qui est impossible sous la condition de la proposition II.4 (voir [12] Prop. V.2).

2. On a $r_K = \sup\{r(Q(t)), t \in K\} < 1$.

Supposons que $r_K = 1$. Alors il existe une suite $(\tau_k)_k$ dans K telle que $\lim_k r(Q(\tau_k)) = 1$. Pour $k \geq 1$, désignons par λ_k une valeur spectrale de $Q(\tau_k)$ telle que $|\lambda_k| = r(Q(\tau_k))$. Par compacité, on peut supposer que les suites $(\tau_k)_k$ et $(\lambda_k)_k$ convergent. Soient $t_0 = \lim_k \tau_k$ et $\lambda = \lim_k \lambda_k$; observons que $t_0 \in K$, donc $t_0 \neq 0$, et $|\lambda| = 1$. Par ailleurs, puisque par hypothèse on a $I = \mathbb{R}$ dans (F5) [et dans (F_{3,4}) sous la condition (F')], la famille $\{Q(t), t \in \mathbb{R}\}$, quand $t \rightarrow t_0$, vérifie les conditions du théorème de Keller-Liverani. On déduit alors de [16] (p. 145) que λ est une valeur spectrale de $Q(t_0)$, ce qui est absurde d'après le point 1 car $t_0 \neq 0$ et $|\lambda| = 1$.

3. Il existe $c \geq 0$ et $\rho_K < 1$ tels que l'on ait, pour tout $n \geq 1$, $\sup_{t \in K} \|Q(t)^n\| \leq c\rho_K^n$.

Soit ρ_K tel que $r_K < \rho_K < 1$, et soit Γ le cercle orientée $\{|z| = \rho_K\}$ dans \mathbb{C} . On a

$$Q(t)^n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} z^n (z - Q(t))^{-1} dz.$$

Les résultats de [16], appliqués comme en 2 au voisinage de $t_0 \in K$, assurent qu'il existe un intervalle ouvert I_{t_0} contenant t_0 tel que $\sup\{\|(z - Q(t))^{-1}\|, t \in I_{t_0}, |z| = \rho_K\} < +\infty$. Par compacité il vient que $\sup\{\|(z - Q(t))^{-1}\|, t \in K, |z| = \rho_K\} < +\infty$. La propriété 3 en résulte. \square

IV.3. Preuves des théorèmes II.1 et II.1'.

Le lien entre la fonction caractéristique de S_n et les éléments du théorème (K-L) découle des formules suivantes : pour tout $f \in \mathcal{B}$, toute probabilité $\mu \in \mathcal{B}'$, et pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} (2) \quad \mathbb{E}_{\mu} \left[f(X_n) e^{itS_n} \right] &= \langle \mu, Q(t)^n f \rangle \\ &= \lambda(t)^n \langle \phi(t), f \rangle \langle \mu, v(t) \rangle + \langle \mu, N(t)^n f \rangle. \end{aligned}$$

La première égalité, vraie pour tout $t \in \mathbb{R}$, se déduit aisément de la propriété de Markov, voir par exemple [12] ; la seconde, vérifiée pour $t \in J$, est une conséquence du théorème (K-L). Comme indiqué en introduction, l'hypothèse (P) va permettre de préciser le comportement en $t = 0$ de la valeur propre perturbée $\lambda(t)$.

Lemme IV.2. *Sous les hypothèses du théorème (K-L) et sous la condition (P), on a :*

$$(\alpha) \text{ Pour tout } t \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$(\beta) \lambda(u) = 1 - \frac{\sigma^2}{2}u^2 + o(u^2).$$

Preuve. Grâce à un résultat classique, on sait d'après (P) que la suite de fonctions caractéristiques $(\mathbb{E}_{\nu} [e^{i\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} S_n}]_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de \mathbb{R} vers ϕ donnée par $\phi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{\sigma\sqrt{N}} \in J$. Dans la suite on supposera toujours que

$|t| \leq 1$ et $n \geq N$, de sorte que $\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \in J$. La formule (2) appliquée avec $f = v(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})$ et $\mu = \nu$ montre que

$$\lambda\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n = \mathbb{E}_\nu\left[v\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)(X_n)e^{i\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}S_n}\right],$$

d'où en utilisant l'inégalité triangulaire et l'invariance de ν ,

$$\begin{aligned} \left|\lambda\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| &\leq \mathbb{E}_\nu\left[\left|v\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)(X_n) - 1\right|\right] + \left|\mathbb{E}_\nu\left[e^{i\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}S_n}\right] - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \\ &= \langle \nu, |v(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}) - \mathbf{1}| \rangle + |\mathbb{E}_\nu[e^{i\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}S_n}] - e^{-\frac{t^2}{2}}|. \end{aligned}$$

Du 3ième point de l'assertion (b) du théorème (K-L) et de la propriété rappelée plus haut, on déduit (α). Plus précisément soit $K = [-1, 1]$. Il vient :

$$\forall \eta > 0, \exists N_0(\eta) \geq N, \forall n \geq N_0(\eta), \forall t \in K, \quad \left|\lambda\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \leq \eta.$$

Soient $t \in K$ et $n \geq N_0(\eta)$. On a $e^{-\frac{1}{2}} \leq e^{-\frac{t^2}{2}} \leq 1$, d'où $|\lambda(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})^n - 1| \leq \eta + 1 - e^{-\frac{1}{2}}$. Par conséquent, si $\eta \leq \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$, alors $\lambda(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})^n$ et $e^{-\frac{t^2}{2}}$ sont dans le disque complexe D de centre $z = 1$ et de rayon $1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$. En outre, d'après le lemme IV.1, on peut écrire $\lambda(u) = |\lambda(u)|e^{i\theta(u)}$, avec $\theta(\cdot)$ continue sur J telle que $\theta(0) = 0$. On a $\lambda(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})^n = |\lambda(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})|^n e^{in\theta(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})}$, et par continuité on déduit de ce qui précède que $|n\theta(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})| < \frac{\pi}{2}$. Pour $z \in \mathbb{C}$ non nul, posons $\log z = \ln|z| + i \arg(z)$, avec $\arg(z) \in]-\pi, \pi]$. Alors $\log \lambda(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})^n = n \log \lambda(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la fonction \log est lipschitzienne sur D , on obtient en choisissant $\eta = \eta(\varepsilon)$ convenablement :

$$\exists N_1(\varepsilon) \geq N, \forall n \geq N_1(\varepsilon), \forall t \in K, \quad \left|n \log \lambda\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) + \frac{t^2}{2}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Écrivons $z - 1 = (\log z)(1 + \alpha(z))$ avec $\lim_{z \rightarrow 1} \alpha(z) = 0$. Alors, pour $\varepsilon \leq 1$, $n \geq N_1(\varepsilon)$ et $t \in K$,

$$\begin{aligned} \left|n\left(\lambda\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - 1\right) + \frac{t^2}{2}\right| &\leq n\left|\lambda\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - 1 - \log \lambda\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right| + \left|n \log \lambda\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) + \frac{t^2}{2}\right| \\ &\leq n|\log \lambda(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})| |\alpha(\lambda(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}))| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \left(\frac{t^2}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right) |\alpha(\lambda(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}))| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq |\alpha(\lambda(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}))| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{u \rightarrow 0} \lambda(u) = 1$, $(\lambda(\frac{\cdot}{\sigma\sqrt{n}}))_n$ converge uniformément vers 1 sur K . Par conséquent :

$$\exists N_2(\varepsilon) \geq N, \forall n \geq N_2(\varepsilon), \forall t \in K, \quad |\alpha(\lambda(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}))| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement, en posant $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$, on a montré que :

$$\forall n \geq N(\varepsilon), \forall t \in K, \quad \left|n\left(\lambda\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - 1\right) + \frac{t^2}{2}\right| \leq \varepsilon.$$

Pour $\frac{1}{2} \leq |t| \leq 1$ et $n \geq N(\varepsilon)$, il vient

$$\left| \left(\frac{t^2}{\sigma^2 n} \right)^{-1} \left(\lambda \left(\frac{t}{\sigma \sqrt{n}} \right) - 1 \right) + \frac{\sigma^2}{2} \right| \leq \frac{\sigma^2}{t^2} \varepsilon \leq 4\sigma^2 \varepsilon.$$

Soit $u \in \mathbb{R}^*$, $|u| \leq \frac{1}{\sigma \sqrt{N(\varepsilon)}}$. Il existe clairement $n \geq N(\varepsilon)$ tel que $\frac{1}{2\sigma \sqrt{n}} \leq |u| \leq \frac{1}{\sigma \sqrt{n}}$. L'inégalité précédente appliquée avec $t = \sigma \sqrt{n} u$ montre que $\left| \frac{\lambda(u)-1}{u^2} + \frac{\sigma^2}{2} \right| \leq 4\sigma^2 \varepsilon$. \square

On suppose maintenant que les conditions des théorèmes II.1 ou II.1' sont satisfaites. Grâce au lemme IV.1, le théorème (K-L) et le lemme IV.2 s'appliquent, et l'on est alors en mesure d'utiliser les techniques usuelles de transformée de Fourier pour établir (TLC) et (TLL). À cet effet on pourra, ou bien adapter les preuves classiques des théorèmes limite central ou local pour les suites de v.a.i.i.d (voir par exemple [4]), ou bien recopier les preuves de [12] (celle du lemme IV.8 pour (TLC) et celle du lemme VI.4 pour (TLL)).

Dans les deux cas, il sera commode de définir, pour tous $f \in \mathcal{B}$ et $t \in J$, l'expression $L(t)f = \langle \phi(t), f \rangle v(t) - \langle \nu, f \rangle \mathbf{1}$,¹⁶ et grâce à (2), d'écrire lorsque $\mu_0 \in \mathcal{B}'$

$$(3) \quad \mathbb{E}_{\mu_0} \left[f(X_n) e^{itS_n} \right] = \lambda(t)^n \nu(f) + \lambda(t)^n \langle \mu_0, L(t)f \rangle + \langle \mu_0, N(t)^n f \rangle.$$

Preuve des théorèmes II.1 et II.1', cas stationnaire. On utilisera ici la formule (3) avec $\mu_0 = \nu$ et $f \in \mathcal{B}$, $f \geq 0$, quelconque, et l'on observera, d'une part que le théorème (K-L) et le lemme IV.2 fournissent les propriétés requises pour $\langle \nu, N(t)^n f \rangle$ et $\lambda(t)^n$,¹⁷ d'autre part que $|\langle \nu, L(t)f \rangle| \leq \vartheta(t) \|f\|$ (Th. (K-L)), donc $\lim_{t \rightarrow 0} \langle \nu, L(t)f \rangle = 0$. \square

Preuve des théorèmes II.1 et II.1', cas non stationnaire. Soit μ_0 une probabilité quelconque sur E telle que $\mu_0 \in \tilde{\mathcal{B}}'$ et soit $f \in \mathcal{B}$, $f \geq 0$. Par hypothèse \mathcal{B} s'envoie continûment dans $\tilde{\mathcal{B}}$, donc $\mu_0 \in \mathcal{B}'$. Comme précédemment, pour établir (TLC) et (TLL), on pourra adapter [4] ou bien recopier les preuves de [12] (lemmes IV.8 et VI.4) en utilisant la formule (3) : les termes $\langle \mu_0, N(t)^n f \rangle$ et $\lambda(t)^n$ sont contrôlés comme dans le cas stationnaire. Pour l'étude du terme $\langle \mu_0, L(t)f \rangle$, on dispose du résultat suivant.

Lemme IV.3. *Sous les conditions $(\tilde{\mathcal{F}})$ ou $(\tilde{\mathcal{F}}')$, $v(t)$ converge vers $\mathbf{1}$ dans $\tilde{\mathcal{B}}$ quand $t \rightarrow 0$.*

De ce lemme il résulte que $|\langle \mu_0, L(t)f \rangle| \leq \vartheta(t) \|f\| + C \|\mu_0\|_{\sim} \|v(t) - \mathbf{1}\|_{\sim} \|f\|$, où $\|\cdot\|_{\sim}$ désigne la norme sur $\tilde{\mathcal{B}}$ et $\tilde{\mathcal{B}}'$. Donc $\lim_{t \rightarrow 0} \langle \mu_0, L(t)f \rangle = 0$.

Preuve du lemme. Nous reprenons ici des arguments déjà utilisés dans [13]. Soit Γ_1 un cercle centré en $\lambda = 1$, de rayon ρ , avec ρ assez petit pour que, pour $z \in \Gamma_1$ et $t \in J$, d'une part $(z - Q)^{-1}$ existe dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{B}})$, d'autre part $(z - Q(t))^{-1}$ existe dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$. Ceci est possible d'après la condition (F2) vérifiée par hypothèse sur \mathcal{B} et $\tilde{\mathcal{B}}$, et d'après le théorème (K-L). On a pour $f \in \mathcal{B}$, $z \in \Gamma_1$, et $t \in J$,

$$(z - Q(t))^{-1} f - (z - Q)^{-1} f = (z - Q)^{-1} (Q(t) - Q) (z - Q(t))^{-1} f.$$

¹⁶Le terme $L(t)f$, noté $L_n(t)f$ dans [12], est dans ce travail indépendant de n , car d'après (F2), $\mathbf{1}$ est l'unique valeur propre périphérique de Q .

¹⁷D'après (β) (lemme IV.2), on a, pour $|u|$ petit, $|\lambda(u)| \leq 1$, et $|\lambda(\frac{u}{\sigma})| \leq 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^2}{4} \leq e^{-\frac{u^2}{4}}$: la 1ère inégalité suffit dans la preuve de (TLC), la seconde est essentielle dans celle de (TLL).

Soit $\tilde{M} = \sup\{\|(z - Q)^{-1}\|_{\sim}, z \in \Gamma_1\}$, où $\|\cdot\|_{\sim}$ désigne la norme sur $\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{B}})$; on a $\tilde{M} < +\infty$ car Q vérifie (F2) sur $\tilde{\mathcal{B}}$. Soit $\varepsilon(t)$ la norme de $Q(t) - Q$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})$; $\varepsilon(t)$ tend vers 0 avec t par hypothèse. Enfin soit $M = \sup\{\|(z - Q(t))^{-1}\|, t \in J, z \in \Gamma_1\}$; on a $M < +\infty$ d'après [16]. D'où

$$\|(z - Q(t))^{-1}f - (z - Q)^{-1}f\|_{\sim} \leq \tilde{M} \varepsilon(t) M \|f\|.$$

Le projecteur $\Pi(t)$ définissant $v(t)$ (cf. § IV.1) est obtenu dans [16], comme dans la théorie classique, comme l'intégrale curviligne de la résolvante $(z - Q(t))^{-1}$ sur le cercle orienté Γ_1 . En intégrant $(z - Q(t))^{-1} - (z - Q)^{-1}$, vue comme application à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})$, on déduit de ce qui précède que $\Pi(t)\mathbf{1}$ converge dans $\tilde{\mathcal{B}}$ vers $\Pi(0)\mathbf{1} = \mathbf{1}$. Le lemme en résulte. \square

Les conseils de Jean-Pierre Conze et Hubert Hennion, qui ont accepté de lire la version préliminaire de ce travail, et d'autre part les nombreuses remarques et recommandations du rapporteur, m'ont permis d'améliorer la présentation de cet article et d'en clarifier certaines parties. Je les en remercie.

References

- [1] BAPAT R.B. AND RAGHAVAN T.E.S. *Non-negative matrices and applications*. Encyclopedia of Mathematics and its applications, **64** (1997).
- [2] BENDA M. *A central limit theorem for contractive stochastic dynamical systems*. J. App. Prob. **35**, 200-205 (1998).
- [3] P. BILLINGSLEY. *The Lindeberg-Levy theorem for martingales*. Proc. Amer. Math. Soc. **12**, 788-792 (1961).
- [4] BREIMAN L. *Probability*
Classic in Applied Mathematics, SIAM, 1993.
- [5] BROISE A., DAL'BO F., PEIGNÉ M. *Études spectrales d'opérateurs de transfert et applications*. Astérisque 238 (1996).
- [6] DUFLO M. *Random Iterative Models*. Applications of Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1997).
- [7] GUIVARC'H Y., HARDY J. *Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov*. Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 24, No 1, p. 73-98 (1988).
- [8] GORDIN M.I. *On the central limit theorem for stationary processes*. Soviet Math. Dokl., 10, no 5, 1174-1176 (1969).
- [9] GORDIN M.I., LIFSIC B.A. *On the central limit theorem for stationary Markov processes*. Soviet Math. Dokl., 19, no 2, 392-394 (1978).
- [10] HENNION H. *Sur un théorème spectral et son application aux noyaux lipchitziens*. Proceeding of the A.M.S, vol. 118 No 2, pp. 627.634 (1993).

- [11] HENNION H. *Limit theorems for products of positive random matrices.* The Annals of Probability, Vol. 25, No 4, p. 1545-1587 (1997).
- [12] HENNION H., HERVÉ L. *Limit theorems for Markov chains and stochastic properties of dynamical systems by quasi-compactness.* Lecture Notes in Mathematics No 1766, Springer (2001).
- [13] HENNION H., HERVÉ L. *Central limit theorems for iterated random lipschitz mappings.* Annals of Proba., to appear.
- [14] IBRAGIMOV I.A. *A central limit theorem for a class of dependant random variables.* Theory Prob. Appl., Vol. 8, pp. 83-89 (1963).
- [15] C.T. IONESCU-TULCEA, G. MARINESCU. *Théorème ergodique pour des classes d'opérations non complètement continues.* Ann. of Maths., 52, 1, 140-147 (1950).
- [16] KELLER G., LIVERANI C. *Stability of the Spectrum for Transfer Operators.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. (4) Vol. XXVIII, pp. 141-152 (1999).
- [17] A. N. KOLMOGOROV. *A local limit theorem for classical Markov chains.* Izv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Math. **13**, 281-300 (1949).
- [18] S.P. MEYN AND R.L. TWEEDIE. *Markov chains and stochastic stability.* Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1993).
- [19] MILHAUD X., RAUGI A. *Etude de l'estimateur du maximum de vraisemblance dans le cas d'un processus auto-régressif : convergence, normalité asymptotique, vitesse de convergence.* Ann. Inst. H. Poincaré, Vol. 25, No 4, pp. 383-428 (1989).
- [20] S.V. NAGAEV *Some limit theorems for stationary Markov chains.* Theory of probability and its applications, 11, 4, pp. 378-406 (1957).
- [21] NAGAEV S.V. *More exact statements of limit theorems for homogeneous Markov chains.* Theory of probability and its applications, 6, 1, pp. 62-81 (1961).
- [22] NUSSBAUM R.D. *The radius of essential spectrum.* Duke Math., J. **37**, (1970), 473-478.
- [23] PETIT B. *θ -transformations, θ -shifts and limit theorems for Riesz-Raikov sums.* Ergod. Th. Dynam. Sys, 16, pp. 335-364 (1996)
- [24] ROUSSEAU-EGELE J. *Un théorème de la limite locale pour une classe de transformations dilatantes.* Annals of Proba., 11, 3, pp. 772-788 (1983).
- [25] SCHAEFER H. *Banach Lattices and positive operators* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1974.
- [26] SEVA M. *On the local limit theorem for non-uniformly ergodic Markov chains.* J. Appl. Prob. **32**, 52-62 (1995).