Transformées en paquets d'ondelettes des signaux stationnaires : comportement asymptotique des densités spectrales

Loïc HERVÉ *

Résumé

On considère la transformée en paquets d'ondelettes associée à un filtre polynomial QMF. Soit $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un signal aléatoire stationnaire à densité spectrale f continue. On démontre que les 2^n signaux, générés à partir de X après n itérations de la transformée, "convergent" vers des bruits blancs quand $n \to +\infty$. Si f est hölderienne, la vitesse de convergence est exponentielle.

1 Enoncé des résultats

On désigne par $(E, \|.\|_\infty)$ l'espace des fonctions continues 1-périodiques muni de la norme uniforme, et pour $\eta \in]0,1]$, on note $(E^\eta, \|.\|_\eta)$ le sous-espace des fonctions uniformément η-hölderiennes, avec

$$\|f\|_\eta = \|f\|_\infty + m_\eta(f), \qquad \text{avec} \quad m_\eta(f) = \sup\left\{\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|^\eta},\ x \neq y\right\}.$$

Soit $H_0(\lambda) = \sum_{k=0}^N h_k^0 e^{2i\pi k\lambda}$ un polynôme trigonométrique tel que $H_0(0) = 1$ et

$$|H_0(\frac{\lambda}{2})|^2 + |H_0(\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2})|^2 = 1, \quad \forall \lambda \in [0,1]. \tag{1}$$

On suppose que les h_k^0 sont des nombres réels, et on définit $h_k^1 = (-1)^{k+1}\overline{h_{-1-k}^0}$ pour $k = -N-1, \ldots, -1$, et

$$H_1(\lambda) = \sum_{k=-N-1}^{-1} h_k^1 e^{2i\pi k\lambda} = e^{-2i\pi\lambda}\overline{H_0(\lambda + \frac{1}{2})}.$$

Notons que $H_0(0) = H_0(1) = H_1(\frac{1}{2}) = 1$, $H_1(0) = H_1(1) = H_0(\frac{1}{2}) = 0$, et que H_1 vérifie également la relation (1). Un tel couple (H_0, H_1) est appelé QMF (quadrature mirror filters)

*I.R.M.A.R.-Université de Rennes 1, Laboratoire de Probabilités, Campus de Beaulieu, 35042 RENNES CEDEX

[3] [8]. La méthode d'analyse spectrale des signaux aléatoires, développée dans [2], consiste à itérer, à partir d'un processus aléatoire initial $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, les deux opérations de filtrage T_0 et T_1 définies par

$$(T_j X)_n = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k^j X_{2n-k}, \quad j = 0, 1, \quad n \in \mathbb{Z},$$

où par convention $h_k^0 = 0$ si $k \notin [0, N]$, et $h_k^1 = 0$ si $k \notin [-N-1, -1]$. Cet algorithme, qui en d'autres termes effectue la transformée en paquets d'ondelettes de X [1], fournit une famille arborescente de signaux stationnaires : après n itérations, on dispose des 2^n processus $T_{\omega_n} \cdots T_{\omega_1} X$, où les ω_i décrivent $\{0, 1\}$.

On note $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$, $u_0 = |H_0|^2$, $u_1 = |H_1|^2$, et P_0, P_1 les opérateurs de transition définis sur E par

$$P_j f(\lambda) = u_j(\frac{\lambda}{2})f(\frac{\lambda}{2}) + u_j(\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2})f(\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}), \quad \lambda \in [0, 1], \quad j = 0, 1. \tag{2}$$

On démontre dans [2] le résultat suivant :

Théorème 1

i) Si $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire du second ordre, les processus T_0X et T_1X sont également stationnaires. Si X a une densité spectrale f, alors $P_0 f$ et $P_1 f$ sont les densités spectrales respectivement de T_0X et T_1X, et plus généralement chaque processus $T_{\omega_n} \cdots T_{\omega_1} X$ admet une densité spectrale égale à $P_{\omega_n} \cdots P_{\omega_1} f$.

ii) Soit Q_0 le nombre de zéros de H_0. On suppose que, pour tout $p \in \{1, \ldots, Q_0\}$,

$$\forall k \in \{1, \ldots, 2^p - 2\}, \quad \exists \ell \in \{0, \ldots, p\}, \quad H_0\left(\frac{k2^\ell}{2^p-1} + \frac{1}{2}\right) \neq 0. \tag{3}$$

Si $f \in E$, alors, pour presque tout $\omega = (\omega_1, \omega_2 \ldots, \omega_n, \ldots) \in \Omega$ (au sens de la probabilité produit équiprobable sur Ω), la suite de processus $(T_{\omega_n} \cdots T_{\omega_1} X)_{n\geq 1}$ "converge" vers un bruit blanc, c'est-à-dire $(P_{\omega_n} \cdots P_{\omega_1} f)_{n\geq 1}$ converge vers une constante $c(f, \omega)$ quand $n \to +\infty$.

Le point i) résulte d'un calcul élémentaire, et l'assertion ii) du théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu [6] et de la loi des grands nombres. Signalons que la condition (3) est exactement l'hypothèse sur les cycles périodiques invariants donnée dans [2]. Dans ce travail, sous une hypothèse du même type mais un peu plus forte que (3), nous nous proposons, d'une part de généraliser la propriété de convergence du ii) à tout $\omega \in \Omega$, et d'autre part de prouver que la vitesse de convergence est exponentielle quand f est hölderienne :

Théorème 2 *Soit Q le nombre de zéros de H_0H_1. On suppose que, pour tout $p \in \{1, \ldots, Q\}$,*

$$\forall k \in \{1, \ldots, 2^p - 2\}, \quad \exists \ell \in \{0, \ldots, p\}, \quad H_0\left(\frac{k2^\ell}{2^p-1}\right) H_1\left(\frac{k2^\ell}{2^p-1}\right) \neq 0. \tag{4}$$

Soit X un processus stationnaire du second ordre admettant une densité spectrale f continue, et soit $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots) \in \Omega$ quelconque. Alors la mesure spectrale $P_{\omega_n} \cdots P_{\omega_1} f$ du *processus $T_{\omega_n}\cdots T_{\omega_1}X$ converge uniformément vers une constante $c(f,\omega)$ quand $n\to+\infty$, c'est-à-dire,*

$$\lim_{n\to+\infty}\|P_{\omega_n}\cdots P_{\omega_1}f-c(f,\omega)\|_\infty=0. \tag{5}$$

Théorème 3 *On conserve les hypothèses et notations du théorème précédent. Si $f\in E^\eta$, alors il existe deux constantes $D>0$ et $\rho\in[0,1[$ (indépendantes de f) telles que l'on ait, pour tout $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_n,\ldots)\in\Omega$,*

$$\|P_{\omega_n}\cdots P_{\omega_1}f-c(f,\omega)\|_\eta\le D\rho^n\|f\|_\eta. \tag{6}$$

Remarques.

a) La propriété (6) montre que la suite d'opérateurs $(P_{\omega_n}\cdots P_{\omega_1})_{n\ge1}$ converge en norme dans E^η avec une vitesse exponentielle. L'étude du comportement asymptotique des spectres discrets dans l'arbre de filtrage, que nous n'abordons pas ici, a été traitée dans [2]. Par ailleurs une étude plus précise des itérées de T_0 a été faite dans [5] dans le cadre des filtres polynomiaux non nécessairement QMF.

b) L'hypothèse (3) est une condition nécessaire et suffisante pour que H_0 engendre une analyse multirésolution, et elle assure que la suite $\{P_0^nf,\ n\ge1\}$ converge uniformément vers $f(0)$ pour tout $f\in E$, voir [2]. Pour $\omega\in\Omega$, on note μ_ω la mesure de probabilité sur le tore définie par

$$\int f\ d\mu_\omega=c(f,\omega),\quad f\in E.$$

Si $\omega=(0,0,\ldots)$, le résultat ci-dessus montre que $\mu_\omega=\delta_0$ (masse de Dirac en 0). Plus généralement, si ω est de la forme $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_r,0,0,\ldots)$, on a $\mu_\omega=\sum_{k=0}^{2^r-1}u_{\omega_r}(\frac{k}{2})\cdots u_{\omega_1}(\frac{k}{2^r})\delta_{\frac{k}{2^r}}$. Cependant ce type de propriété ne s'étend pas à tous les éléments de Ω. Plus précisément, soient ν la mesure produit équiprobable sur Ω, $\mathcal{D}$ l'ensemble des points dyadiques de $[0,1[$, et soit enfin A le sous-ensemble de Ω formé des ω tels que μ_w est de la forme $\mu_\omega=\sum_{a\in\mathcal{D}}\alpha_a(\omega)\delta_a$, où les $\alpha_a(\omega)$ sont des réels positifs tels que $\sum_{a\in\mathcal{D}}\alpha_a(\omega)=1$. Alors $\nu(A)=0$. En effet, on établit aisément par récurrence que $\int_0^1 f(\lambda)d\lambda=2^{-n}\sum_{\omega_1,\ldots,\omega_n\in\{0,1\}}\int_0^1 P_{\omega_n}\cdots P_{\omega_1}f(\lambda)d\lambda$, pour tout $f\in E$ et pour tout $n\ge1$. D'où, grâce au théorème de convergence dominée sur (Ω,ν),

$$\int_0^1 f(\lambda)d\lambda=\int_\Omega c(f,\omega)d\nu(\omega).$$

Donc, pour tout borélien B, on a $m(B)=\int_\Omega\mu_\omega(B)d\nu(\omega)$, où m est la mesure de lebesgue sur $[0,1]$. Pour $B=\mathcal{D}$, on obtient $0=m(\mathcal{D})\ge\nu(A)$. Donc $\nu(A)=0$.

Signalons également que, si $\omega=(1,1,\ldots)$, alors μ_ω est une mesure continue : $\mu_\omega(\{x\})=0$ pour tout $x\in[0,1[$. En effet supposons que $\mu_\omega(\{x\})>0$. On sait que μ_ω est invariante sous l'action de P_1 et Δ, où Δ est la transformation définie par $\Delta\lambda=2\lambda\ \ (mod.1)$, voir [7]. On en déduit aisément que x est nécessairement un point fixe pour une certaine puissance Δ^p de Δ, et que $u_1(\Delta^kx)=1$ pour $k=1,\ldots,p$, ce qui contredit l'hypothèse (4). Donc $\mu_\omega(\{x\})=0$. De même, si $\omega=(0,1,0,1,\ldots)$, ou plus généralement si ω est cyclique, on peut montrer que μ_ω est une mesure continue.

c) Pour tout $n \geq 1$, l'application $A_n \ : f \mapsto (P_{\omega_n} \cdots P_{\omega_1} f)_{\omega_1,\ldots,\omega_n \in \{0,1\}}$ est injective de E dans E^{2^n}. Il suffit de le vérifier pour $n = 1$: or, pour λ fixé, on a ${}^t[P_0 f(2\lambda), P_1 f(2\lambda)] = \mathcal{A}(\lambda)\ {}^t[f(\lambda), f(\lambda + \frac{1}{2})]$, où $\mathcal{A}(\lambda)$ est une matrice carrée d'ordre 2 qui s'exprime aisément à l'aide de $u_0(\lambda)$ et $u_1(\lambda)$, et dont le déterminant est : $D(\lambda) = (u_0(\lambda))^2 - (u_1(\lambda))^2$. L'injectivité de A_1 résulte du fait que D a un nombre fini de zéros.
Par conséquent si deux processus X et Y admettent des densités spectrales f_X et f_Y distinctes, alors $A_n f_X \neq A_n f_Y$ pour tout $n \geq 1$, et en ce sens, la transformée en ondelettes des signaux stationnaires fournit un procédé d'analyse spectrale. Cependant, la propriété d'injectivité de A_n peut se "dégrader" quand $n \to +\infty$. Plus précisément, considérons l'exemple du filtre de Haar : $H_0(\lambda) = \frac{1+e^{2i\pi\lambda}}{2}$. Un calcul simple montre que, pour $f(\lambda) = \sin 2\pi\lambda$, on a $P_0 f = \frac{1}{2} f$ et $P_1 f = -\frac{1}{2} f$, de sorte que $c(f, \omega) = 0$ pour tout $\omega \in \Omega$. En d'autres termes, l'application $f \mapsto c(f, \cdot)$ associée au filtre de Haar n'est pas injective. Nous ne sommes pas parvenus à étudier, pour H_0 quelconque, l'injectivité de $f \mapsto c(f, \cdot)$.

La suite de ce papier est consacrée à la démonstation des théorèmes 1.2 et 1.3 qui repose, d'une part sur la positivité des opérateurs P_0, P_1 et la notion de points périodiques [2] [4] (étude dans E), et d'autre part sur le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu et des arguments de compacité (étude dans E^η).

2 Démonstration du théorème 1.2

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de démontrer le théorème 1.2. Pour simplifier, on notera, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots) \in \Omega$,

$$\Pi_n^\omega f(\lambda) = P_{\omega_n} \cdots P_{\omega_1} f(\lambda), \qquad f \in E, \quad \lambda \in [0,1].$$

Rappelons que $u_1(\lambda) = u_0(\lambda + \frac{1}{2})$. Les opérateurs P_0 et P_1 définis par (2) sont bornés, positifs sur E, et vérifient $P_0 1 = P_1 1 = 1$, où 1 est la fonction identiquement égale à 1. De même chaque opérateur Π_n^ω est positif, borné sur E, et vérifie

$$\Pi_n^\omega 1 = 1, \qquad \|\Pi_n^\omega f\|_\infty \leq \|f\|_\infty, \quad \forall f \in E.$$

On définit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{T}_k = \text{vect}\ \{e^{-2i\pi k\lambda}, \ldots, e^{2i\pi k\lambda}\}$. Notons que u_0 et u_1 appartiennent à $\mathcal{T}_N$. Pour de simples raisons de degré, il est clair que, si f est un polynôme trigonométrique, alors les fonctions $\Pi_n^\omega f$ appartiennent à $\mathcal{T}_N$ pour n assez grand. De même, on montre facilement que P_0, P_1, et donc Π_n^ω, opèrent sur $\mathcal{T}_N$.

Soient S_0 et S_1 les applications définies par

$$S_j\lambda = \frac{\lambda + j}{2}, \quad \lambda \in [0,1] \quad j = 0, 1.$$

Pour $\lambda \in [0,1]$, $\omega \in \Omega$, et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $T_{n,\lambda}^\omega$ l'ensemble des points $\sigma_n \cdots \sigma_1 \lambda$ tels que $\sigma_i \in \{S_0, S_1\}$ et $u_{\omega_n}(\sigma_1\lambda) \cdots u_{\omega_1}(\sigma_n \cdots \sigma_1 \lambda) > 0$. Compte-tenu des identités $u_j(\frac{\lambda}{2}) + u_j(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}) = 1$, l'ensemble $T_{n,\lambda}^\omega$ n'est jamais vide. On notera $[a]$ la partie entière d'un réel a, et θ le shift défini sur Ω par

$$\theta\omega = \theta(\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots) = (\omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots).$$

La démonstration du théorème 1.2 utilise les deux lemmes techniques suivants :

Lemme 1 *Soit h une fonction de E à valeurs positives ou nulles, et soient $\omega \in \Omega$, $\lambda \in [0,1]$, $m, \ell \in \mathbb{N}^*$, et enfin $y = \tau_\ell \cdots \tau_1 \lambda \in T_{\ell,\lambda}^{\theta^m \omega}$. Si $\Pi_m^\omega h(y) > 0$, alors on a $\Pi_{\ell+m}^\omega h(\lambda) > 0$.*

Lemme 2 *On note $r = [\log_2(2N+1)] + 1 + 2Q$. Soit h une fonction de $\mathcal{T}_N$ à valeurs positives ou nulles, mais non identiquement nulle. Il existe $\delta > 0$ telle que*

$$P_{\mu_n} \cdots P_{\mu_1} P_1 P_{\omega_r} \cdots P_{\omega_1} h(\lambda) \geq \delta, \quad \forall \lambda \in [0,1],\ \forall n \geq 1,\ \forall \omega_i, \mu_i \in \{0,1\}.$$

Preuve du lemme 2.1 : on montre aisément par récurrence que

$$\Pi_m^\omega h(\lambda) = \sum_{\sigma_1, \ldots, \sigma_m \in \{S_0, S_1\}} u_{\omega_m}(\sigma_1 \lambda) \cdots u_{\omega_1}(\sigma_m \cdots \sigma_1 \lambda) h(\sigma_m \cdots \sigma_1 \lambda).$$

Comme $y \in T_{\ell,\lambda}^{\theta^m \omega}$, on a $A = u_{\omega_{m+\ell}}(\tau_1 \lambda) \cdots u_{\omega_{m+1}}(\tau_\ell \cdots \tau_1 \lambda) > 0$. Le lemme 2.1 se déduit alors de l'inégalité

$$\begin{aligned} \Pi_{m+\ell}^\omega h(\lambda) &\geq A \sum_{\sigma_{\ell+1}, \ldots, \sigma_{\ell+m} \in \{S_0, S_1\}} u_{\omega_m}(\sigma_{\ell+1} y) \cdots \times \\ &\quad u_{\omega_1}(\sigma_{\ell+m} \cdots \sigma_{\ell+1} y) h(\sigma_{\ell+m} \cdots \sigma_{\ell+1} y) \\ &= A\ \Pi_m^\omega h(y). \end{aligned}$$

□

Avant de donner la preuve du lemme 2.2, commençons par faire quelques rappels sur la notion de points périodiques [2] [4], et le lien avec la condition (4). Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on dit que $\lambda \in [0,1]$ est un point p-périodique s'il existe p éléments $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ de $\{S_0, S_1\}$ tels que $\sigma_p \cdots \sigma_1 \lambda = \lambda$, et si p est le plus petit entier pour lequel on a une telle relation (de manière équivalente, si $\Delta^p \lambda = \lambda$ et $\Delta^k \lambda \neq \lambda$ pour $k = 1, \ldots, p-1$, où $\Delta x = 2x$ mod. 1). La famille $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_p\}$ vérifiant la relation ci-dessus est unique, et l'on note

$$\mathcal{C}_\lambda = \{\sigma_k \cdots \sigma_1 \lambda,\ k = 1, \ldots, p\}.$$

Il est clair que les points périodiques d'ordre inférieur ou égal à un entier m, $m \in \mathbb{N}^*$, sont de la forme $\frac{k}{2^p - 1}$, où $p \in \{1, \ldots, m\}$ et $k \in \{0, 1, \ldots, 2^p - 1\}$. La condition (4) est équivalente à la suivante :

$$\forall \lambda \in]0,1[,\ \text{p-périodique},\ 2 \leq p \leq Q,\ \ \exists y \in \mathcal{C}_\lambda, \quad H_0(y) H_1(y) \neq 0. \tag{7}$$

Pour $\lambda \in [0,1]$, on note $A_\lambda = \{\sigma_n \cdots \sigma_1 \lambda,\ n \geq 1,\ \sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \{S_0, S_1\}\}$. Nous aurons besoin des propriétés suivantes démontrées dans [4] :

Soit $\lambda \in [0,1]$. Si λ est périodique, alors un (et uniquement un) des points $S_0 \lambda$ et $S_1 \lambda$ est périodique. Si λ n'est pas périodique, les points de A_λ sont distincts deux à deux et ne sont pas périodiques.

Preuve du lemme 2.2 : on note Z l'ensemble des zéros de $u_0 u_1$, et $|E|$ le cardinal d'un ensemble quelconque E. Rappelons que $|Z| = Q$. Les opérateurs P_i étant positifs et tels que $P_i 1 = 1$, il suffit de prouver qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$P_1 P_{\omega_r} \cdots P_{\omega_1} h(\lambda) \geq \delta, \quad \forall \lambda \in [0,1],\ \forall \omega_1, \ldots, \omega_r \in \{0,1\}. \tag{8}$$

(a) *Soit* $r_1 = [\log_2(2N+1)] + 1$. *Si* λ *est non périodique et tel que* $A_\lambda \cap Z = \emptyset$, *alors* $\Pi_m^\omega h(\lambda) > 0,\ \forall m \geq r_1,\ \forall \omega \in \Omega$. En effet, sinon on aurait $h(\sigma_m \cdots \sigma_1 \lambda) = 0$ pout chaque $\sigma_m, \ldots, \sigma_1 \in \{S_0, S_1\}$, ce qui est impossible car h admet au plus $2N+1$ racines.

(b) *Soit* $r_2 = r_1 + Q$. *Si* λ *est non périodique, alors* $\Pi_m^\omega h(\lambda) > 0,\ \forall m \geq r_2,\ \forall \omega \in \Omega$. Pour prouver (b), considérons les ensembles

$$A_\lambda^Q = \{\sigma_k \cdots \sigma_1 \lambda,\ 1 \leq k \leq Q,\ \sigma_i \in \{S_0, S_1\}\}$$

$$F_\lambda^Q = \{\sigma_Q \cdots \sigma_1 \lambda,\ \sigma_i \in \{S_0, S_1\}\}.$$

On note $p = |A_\lambda^Q \cap Z|$. Soit $\omega' \in \Omega$ quelconque. On a $0 \leq p \leq Q$, et $|F_\lambda^Q - T_{Q,\lambda}^{\omega'}| \leq 2^{Q-1} + 2^{Q-2} + \cdots + 2^{Q-p} = 2^Q - 2^{Q-p}$. Pour prouver cette inégalité, on peut par exemple représenter l'ensemble A_λ^Q sous la forme d'un arbre dyadique de racine λ (admettant pour fils $\frac{\lambda}{2}$ et $\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}$ ...etc...), et remarquer que le nombre $|F_\lambda^Q - T_{Q,\lambda}^{\omega'}|$ est d'autant plus grand que les éléments de Z sont proches de λ dans l'arbre. Il en résulte que $|T_{Q,\lambda}^{\omega'}| \geq 2^{Q-p} > Q - p$. Les points de A_λ étant distincts deux à deux, on en déduit qu'il existe $y \in T_{Q,\lambda}^{\omega'}$ tel que $A_y \cap Z = \emptyset$. Rappelons que y est nécessairement non périodique. Soient maintenant $m \geq 1$ et $\omega \in \Omega$ quelconques : il existe $y_m \in T_{Q,\lambda}^{\theta^m \omega}$ non périodique tel que $A_{y_m} \cap Z = \emptyset$. Du (a), il vient que $\Pi_m^\omega h(y_m) > 0$ pour tout $m \geq r_1$, d'où, d'après le lemme 2.1, $\Pi_{m+Q}^\omega h(\lambda) > 0$, ce qui prouve (b).

(c) *Soit* $r = r_2 + Q$. *Si* λ *est périodique,* $\lambda \neq 0$, *alors* $\Pi_m^\omega h(\lambda) > 0,\ \forall m \geq r,\ \forall \omega \in \Omega$. Démontrons tout d'abord que, pour tout $\omega' \in \Omega$, il existe un élément y de $T_{Q,\lambda}^{\omega'}$ non périodique : dans le cas contraire, en vertu des propriétés sur les points périodiques rappelées ci-dessus, l'ensemble $T_{Q,\lambda}^{\omega'}$ serait en fait réduit à un seul élément qui en outre appartiendrait à $\mathcal{C}_\lambda$, d'où $u_0(t)u_1(t) = 0$ pour tout $t \in \mathcal{C}_\lambda$, ce qui contredit l'hypothèse (7).
Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Il existe donc $y \in T_{Q,\lambda}^{\theta^m \omega}$ non périodique, de sorte qu'on a, pour tout $m \geq r_2$, $\Pi_m^\omega h(y) > 0$ et donc d'après le lemme 2.1, $\Pi_{m+Q}^\omega h(\lambda) > 0$. Le point (c) est prouvé.

On a en particulier démontré que, pour tout $\omega_1, \ldots, \omega_r, \omega_{r+1} \in \{0,1\}$ et tout $\lambda \neq 0$, $P_{\omega_{r+1}} P_{\omega_r} \cdots P_{\omega_1} h(\lambda) > 0$. Remarquons que, si $\omega_{r+1} = \omega_r = \cdots = \omega_2 = 0$ et $\omega_1 = 1$, alors $\Pi_{r+1}^\omega h(0) = u_0(0) \cdots u_0(0) u_1(\frac{1}{2}) h(\frac{1}{2}) = h(\frac{1}{2})$, ce dernier terme pouvant être nul. Pour $\lambda = 0$, il est donc nécessaire d'avoir $\omega_{r+1} = 1$.

(d) *(cas* $\lambda = 0$*). On a* $P_1 P_{\omega_r} \cdots P_{\omega_1} h(0) > 0,\ \forall \omega_1, \ldots, \omega_r \in \{0,1\}$. En effet, comme $u_1(0) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} P_1 P_{\omega_r} \cdots P_{\omega_1} h(0) &= \sum_{\sigma_2, \ldots, \sigma_{r+1} \in \{S_0, S_1\}} u_1(\frac{1}{2}) u_{\omega_r}(\sigma_2 \frac{1}{2}) \cdots \times \\ &\quad u_{\omega_1}(\sigma_{r+1} \cdots \sigma_2 \frac{1}{2}) h(\sigma_{r+1} \cdots \sigma_2 \frac{1}{2}) \\ &= P_{\omega_r} \cdots P_{\omega_1} h(\frac{1}{2}) \end{aligned}$$

ce dernier terme étant > 0 d'après ce qui précède.

Notons que r est bien indépendant de la fonction h. Nous pouvons maintenant prouver (8). Soit $\omega_1, \ldots, \omega_r \in \{0,1\}$. Il existe une constante $\delta_{(\omega_1, \ldots, \omega_r)} > 0$ ne dépendant que de $(\omega_1, \ldots, \omega_r)$

telle que $P_1 P_{\omega_r} \cdots P_{\omega_1} h \geq \delta_{(\omega_1,\ldots,\omega_r)}$. On en déduit (8) avec $\delta = \min\{\delta_{(\omega_1,\ldots,\omega_r)}, \omega_i \in \{0,1\}\}$. $\square$

Démonstration du théorème 1.2. Soit $\omega \in \Omega$.

1^{er} cas : il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\omega_n = 0$ pour tout $n > k$. Alors $\Pi_n^\omega = P_0^{n-k} \Pi_k^\omega$. On déduit de l'étude des itérées de P_0 faite dans [2] que, pour tout $f \in E$, la suite $\{\Pi_n^\omega f, n \geq 1\}$ converge uniformément vers la constante $\Pi_k^\omega f(0)$.

2^{ieme} cas : il existe une suite strictement croissante $(\phi(n))_{n\geq 1}$ d'entiers positifs tels que $\omega_{\phi(n)} = 1$. Commençons par supposer que

• $f \in \mathcal{T}_N$: on peut choisir les $\phi(n)$ tels que $\phi(n+1) - \phi(n) > r+1$, où r est l'entier défini dans le lemme 2.2. Soit $\psi(n) = \phi(n) - r - 1$. La famille $\{\Pi_{\psi(n)}^\omega f, n \geq 1\}$ est bornée dans l'espace $\mathcal{T}_N$ qui est de dimension finie. On peut donc en extraire une sous-suite $\{\Pi_{\tau(n)}^\omega f, n \geq 1\}$ convergeant uniformément vers une fonction g de $\mathcal{T}_N$.

Nous allons démontrer que g est identiquement égale à $c = \inf_{\lambda \in [0,1]}[g(\lambda)]$. A cet effet procédons par l'absurde et supposons qu'il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $g(\lambda) > c$. On a $\Pi_{\tau(n+1)}^\omega = R_n \Pi_{\tau(n)}^\omega$ où

$$R_n = P_{\omega_{\tau(n+1)}} \cdots P_{\omega_{\tau(n)+r+2}} P_{\omega_{\tau(n)+r+1}} P_{\omega_{\tau(n)+r}} \cdots P_{\omega_{\tau(n)+1}}.$$

Rappelons que par construction $\omega_{\tau(n)+r+1} = 1$. Le lemme 2.2 appliqué avec $h = g - c$ assure l'existence d'une constante $\delta > 0$ telle que l'on ait $R_n(g-c) \geq \delta$, ou encore $R_n g \geq c + \delta$, pour tout $n \geq 1$. Or on a $\Pi_{\tau(n+1)}^\omega f - R_n g = R_n(\Pi_{\tau(n)}^\omega f - g)$, d'où $\|\Pi_{\tau(n+1)}^\omega f - R_n g\|_\infty \leq \|\Pi_{\tau(n)}^\omega f - g\|_\infty$. La suite $\{R_n g, n \geq 1\}$ converge donc uniformément vers g. Il en résulte que $\lim_{n\to+\infty}[\inf_{\lambda\in[0,1]} R_n g(\lambda)] = c$, ce qui est impossible d'après l'inégalité ci-dessus. Donc $g = c$. On conclut que $\{\Pi_n^\omega f, n \geq 1\}$ converge uniformément vers c en remarquant que, pour tout $m \geq \tau(n)$,

$$\|\Pi_m^\omega f - c\|_\infty = \|P_{\omega_m} \cdots P_{\omega_{\tau(n)+1}}(\Pi_{\tau(n)}^\omega f - c)\|_\infty \leq \|\Pi_{\tau(n)}^\omega f - c\|_\infty.$$

Passons au cas général

• $f \in E$: il existe une suite $(f_k)_{k\geq 1}$ de polynômes trigonométriques convergeant dans E vers f. Soit $\epsilon > 0$. On a $\|\Pi_q^\omega f - \Pi_p^\omega f\|_\infty \leq \|\Pi_q^\omega f - \Pi_q^\omega f_k\|_\infty + \|\Pi_q^\omega f_k - \Pi_p^\omega f_k\|_\infty + \|\Pi_p^\omega f_k - \Pi_p^\omega f\|_\infty \leq 2\|f_k - f\|_\infty + \|\Pi_q^\omega f_k - \Pi_p^\omega f_k\|_\infty$. On fixe k assez grand pour que $\|f_k - f\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{3}$. On sait que, pour ℓ assez grand, $\Pi_\ell^\omega f_k \in \mathcal{T}_N$ (car P_0 et P_1 contractent les degrés). On déduit de ce qui précède que la suite $\{\Pi_n^\omega f_k, n \geq 1\}$ converge dans E, et finalement que $\{\Pi_n^\omega f, n \geq 1\}$ est une suite de Cauchy dans E. Cette dernière suite converge donc vers une fonction $h \in E$, et on a en particulier $\lim_{n\to+\infty} P_1(P_{\omega_{\phi(n)-1}} \cdots P_{\omega_1} f) = P_1 h = h$ (car $\omega_{\phi(n)} = 1$). On conclut en utilisant le fait que, sous l'hypothèse (7) (qui assure que u_1 n'a pas de cycle périodique invariant), les fonctions P_1-invariantes sont constantes, voir [2]. $\square$

3 Démonstration du théorème 1.3

Nous conservons les notations et hypothèses précédentes (voir début du paragraphe 2), et nous nous proposons de démontrer le théorème 1.3, c'est-à-dire l'inégalité (6) pour tout $f \in E^\eta$. Pour simplifier les notations, on suppose que $\eta = 1$ (la démonstration est identique pour $\eta \in]0,1]$ quelconque). Remarquons tout d'abord que P_0, P_1, et donc chaque Π_n^ω, sont des opérateurs bornés sur E^1. Plus précisément, on démontre facilement l'existence de constantes $C, R > 0$ telles que l'on ait pour $j = 0, 1$ et tout $f \in E^1$

$$m_1(P_j f) \leq 2^{-1} m_1(f) + C\|f\|_\infty \tag{9}$$

$$\|P_j f\|_1 \leq 2^{-1}\|f\|_1 + R\|f\|_\infty. \tag{10}$$

On en déduit que, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\|\Pi_2^\omega f\|_1 \leq \frac{1}{4}\|f\|_1 + \frac{3}{2}R\|f\|_\infty,$$

et plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|\Pi_n^\omega f\|_1 \leq 2^{-n}\|f\|_1 + 2R\|f\|_\infty. \tag{11}$$

D'autre part, pour tout $f \in E$, les suites $\{P_0^n f, n \geq 1\}$ et $\{P_1^n f, n \geq 1\}$ convergent dans E. En vertu du théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu [6] [9], la valeur propre 1 est l'unique valeur spectrale de module 1 pour P_0 et P_1, et on obtient les décompositions suivantes sur E^1 :

Pour $i = 0, 1$, il existe une mesure de probabilité ν_i, P_i-invariante sur le tore, et un opérateur Q_i borné sur E^1, de rayon spectral strictement inférieur à 1, tels que

$$\forall f \in E^1, \quad P_i f = \int f d\nu_i + Q_i(f). \tag{12}$$

avec, en outre, $Q_i\nu_j = 0$ et $\nu_i\nu_j = \nu_j$ pour $i, j \in \{0, 1\}$ (on a noté ν_i l'opérateur défini sur E^1 par $\nu_i(f) = \int f d\nu_i$). On en déduit que, pour tout $f \in E^1$,

$$\Pi_n^\omega(f) = \nu_{\omega_1}(f) + \nu_{\omega_2} Q_{\omega_1} f + \cdots + \nu_{\omega_n} Q_{\omega_{n-1}} \cdots Q_{\omega_1} f + Q_{\omega_n} \cdots Q_{\omega_1} f. \tag{13}$$

La démonstration du théorème 1.3 utilise les trois lemmes suivants :

Lemme 3 *Il existe une constante $D > 0$ telle que*

$$\forall f \in E^1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall \omega_1, \ldots, \omega_n \in \{0, 1\}, \quad \|Q_{\omega_n} \cdots Q_{\omega_1} f\|_1 \leq D\ \|f\|_1.$$

Lemme 4 *On a pour tout $f \in E^1$ et tout $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots) \in \Omega$*

(a) $\lim_{n\to+\infty} \|Q_{\omega_n} \cdots Q_{\omega_1} f\|_\infty = 0.$

(b) $\lim_{n\to+\infty} \|Q_{\omega_n} \cdots Q_{\omega_1} f\|_1 = 0.$

Lemme 5 *Pour tout réel $\beta > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}^*$ tel que*

$$\forall f \in E^1, \quad \forall n \geq M, \quad \forall \omega_1, \ldots, \omega_n \in \{0, 1\}, \quad \|Q_{\omega_n} \cdots Q_{\omega_1} f\|_1 \leq \beta\ \|f\|_1.$$

Commençons par admettre ces lemmes, et donnons la

Démonstration du théorème 1.3 : soient β tel que $0 < \beta < 1$, et M l'entier du lemme 3.3 correspondant à β. Soient $\omega \in \Omega$, et $k \in \mathbb{N}^*$ qu'on écrit sous la forme $k = qM + r$, où $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, \ldots, M-1\}$. Alors

$$\begin{aligned} \|Q_{\omega_k} \cdots Q_{\omega_1} f\|_1 &\leq D\ \beta^q\ \|f\|_1 \\ &= D'(\beta^{\frac{1}{M}})^k\ \|f\|_1. \end{aligned}$$

On pose $\rho = \beta^{\frac{1}{M}}$ et $T_k f = Q_{\omega_k} \cdots Q_{\omega_1} f$. Utilisant (13) et le fait que, pour $g \in E^1$ et $j = 0, 1$, $\|\nu_j(g)\|_1 = |\nu_j(g)| \leq \|g\|_\infty \leq \|g\|_1$, on montre aisément que

$$\begin{aligned} \|\Pi^\omega_{n+p} f - \Pi^\omega_n f\|_1 &\leq \|T_n f\|_1 + \sum_{k=n}^{n+p} \|T_k f\|_1 \\ &\leq 2D'(\sum_{k=n}^{n+p} \rho^k)\|f\|_1. \end{aligned}$$

On conclut grâce au critère de Cauchy, et au théorème 1.2 qui permet d'identifier la limite à une constante.

Preuve du lemme 3.1 : la démonstration de ce lemme est donnée dans [2]. Nous la reprenons ici car elle met en jeu une inégalité importante dont nous aurons besoin dans la suite. Grâce à (9), (12), et enfin aux relations entre Q_i et ν_j, on obtient les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} \|Q_{\omega_n} \cdots Q_{\omega_1} f\|_1 &= \|Q_{\omega_n} P_{\omega_{n-1}} \cdots P_{\omega_1} f\|_1 \\ &= \|Q_{\omega_n} P_{\omega_{n-1}} \cdots P_{\omega_1} f\|_\infty + m_1(P_{\omega_n} \cdots P_{\omega_1} f) \\ &\leq 2\|f\|_\infty + 2^{-1} m_1(P_{\omega_{n-1}} \cdots P_{\omega_1} f) + C\ \|f\|_\infty, \end{aligned}$$

et finalement

$$\|Q_{\omega_n} \cdots Q_{\omega_1} f\|_1 \leq (2 + C + C2^{-1} + \cdots C2^{-(n-1)})\|f\|_\infty + 2^{-n} m_1(f). \tag{14}$$

$\square$

Preuve du lemme 3.2 : (a) On obtient grâce à (13)

$$\nu_{\omega_{n+1}} \Pi^\omega_n f = \sum_{i=1}^{n+1} \nu_{\omega_i} Q_{\omega_{i-1}} \cdots Q_{\omega_1} f.$$

Rappelons que $(\Pi^\omega_n f)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers une constante $c(f, \omega)$. On a en outre

$$\begin{aligned} \|\nu_{\omega_{n+1}}(\Pi^\omega_n f) - c(f,\omega)\|_\infty &= \|\nu_{\omega_{n+1}}\left[\Pi^\omega_n f - c(f,\omega)\right]\|_\infty \\ &\leq \|\Pi^\omega_n f - c(f,\omega)\|_\infty, \end{aligned}$$

d'où, d'après le théorème 1.2, $\lim_{n \to +\infty} \|\nu_{\omega_{n+1}}(\Pi^\omega_n f) - c(f,\omega)\|_\infty = 0$. On en déduit que $\{\sum_{i=1}^n \nu_{\omega_i} Q_{\omega_{i-1}} \cdots Q_{\omega_1} f,\ n \geq 1\}$ converge dans E vers $c(f, \omega)$ quand $n \to +\infty$. On utilise à nouveau (13) pour en déduire le (a) du lemme.

(b) On pose $a_n = m_1(Q_{\omega_n} \cdots Q_{\omega_1} f)$ et $b_n = \|Q_{\omega_n} \cdots Q_{\omega_1} f\|_\infty$. En vertu du (a), il reste à prouver que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Or, on a $a_k = m_1(P_{\omega_k} Q_{\omega_{k-1}} \cdots Q_{\omega_1} f)$, d'où d'après (9), $a_k \leq 2^{-1} a_{k-1} + C b_{k-1}$, et pour tout $p \geq 1$,

$$a_{n+p} \leq 2^{-p} a_n + C(b_{n+p-1} + 2^{-1} b_{n+p-2} + \cdots 2^{-p+1} b_n).$$

L'assertion (b) résulte donc du point (a) et du fait que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est bornée (cf. lemme 3.1).

Preuve du lemme 3.3 : on note $\mathcal{S}_1$ la sphère unité de E^1. Par ailleurs on définit sur Ω la distance $d(\omega, \omega') = \sum_{k\geq 1} 2^{-k} |\omega_k - \omega'_k|$. Rappelons que (Ω, d) est compact.
Nous procédons par l'absurde en supposant qu'il existe un réel $\beta > 0$ pour lequel on a la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists \psi(n) \geq n, \quad \exists \omega_1^{\psi(n)}, \ldots, \omega_{\psi(n)}^{\psi(n)} \in \{0,1\}, \quad \exists f_{\psi(n)} \in \mathcal{S}_1, \quad \text{tels que}$$

$$\|Q_{\omega_{\psi(n)}^{\psi(n)}} \cdots Q_{\omega_1^{\psi(n)}} f_{\psi(n)}\|_1 > \beta.$$

On pose $\omega^{\psi(n)} = (\omega_1^{\psi(n)}, \ldots, \omega_{\psi(n)}^{\psi(n)}, 0, 0, \ldots) \in \Omega$. En vertu du théorème d'Ascoli et de la compacité de Ω, il existe une suite d'entiers positifs $(\phi(n))_{n\geq 1}$ strictement croissante (extraite de $(\psi(n))_{n\geq 1}$) telle que $(\omega^{\phi(n)})_{n\geq 1}$ converge vers $\omega \in \Omega$, et telle que $(f_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ converge dans E vers $f \in E^1$, avec $\|f\|_1 \leq 1$. Posant

$$A_n = Q_{\omega_{\phi(n)}^{\phi(n)}} \cdots Q_{\omega_1^{\phi(n)}},$$

on obtient

$$\beta < \|A_n f_{\phi(n)}\|_1 \leq \|A_n(f_{\phi(n)} - f)\|_1 + \|A_n f\|_1.$$

Nous allons démontrer que ces deux derniers termes ont une limite nulle quand $n \to +\infty$, ce qui constituera bien une contradiction :
De (14), il vient que $\|A_n(f_{\phi(n)} - f)\|_1 \leq E\ \|f_{\phi(n)} - f\|_\infty + 2^{-\phi(n)} m_1(f_{\phi(n)} - f)$, avec $E = 2(C+1)$. En outre, on a $m_1(f_{\phi(n)} - f) \leq 2$, d'où $\lim_{n\to+\infty} \|A_n(f_{\phi(n)} - f)\|_1 = 0$.
La convergence de $(\omega^{\phi(n)})_{n\geq 1}$ vers $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots)$ entraîne qu'il existe une suite $(k(n))_{n\geq 1}$ d'entiers positifs, avec $\lim_{n\to+\infty} k(n) = +\infty$, telle que $w_k^{\phi(n)} = \omega_k$ pour tout $1 \leq k \leq k(n)$. Si $k(n) \geq \phi(n)$, alors $A_n = Q_{\omega_{\phi(n)}} \cdots Q_{\omega_1}$. Si $k(n) < \phi(n)$, alors $A_n = Q_{\omega_{\phi(n)}^{\phi(n)}} \cdots Q_{\omega_{k(n)+1}^{\phi(n)}} (Q_{\omega_{k(n)}} \cdots Q_{\omega_1})$, d'où $\|A_n f\|_1 \leq D\ \|Q_{\omega_{k(n)}} \cdots Q_{\omega_1} f\|_1$ d'après le lemme 3.1. On déduit du lemme 3.2 (b) que $\lim_{n\to+\infty} \|A_n f\|_1 = 0$, ce qui achève la démonstration du lemme 3.3. □

Références

[1] Coifman R., Meyer Y., Quake S., Wickerhauser M.V. *Signal processing and compression with wave packets*
Proceeding of the Conference on Wavelets, Marseilles, Spring 1989.

[2] Conze J.-P., Raugi A. *Fonctions harmoniques pour un opérateur de transition et applications.*
Bull. Soc. Math. France, 118, 1990, p. 273-310.

[3] ESTEBAN D., GALAND C. *Application of Quadrature Mirror Filters to Split-band Voice Coding Schemes*
proc. of ICASSP, Hartford, Connecticut, 1977.

[4] HERVÉ L. *Etude d'opérateurs quasi-compacts et positifs. Applications aux opérateurs de transfert*
Ann. Inst. H. Poincaré, probab. et Statist., Vol. 30, N. 3, 1994, p. 437-466.

[5] HERVÉ L. *Comportement asymptotique dans l'algorithme de transformée en ondelettes. Lien avec la régularité de l'ondelette.*
Revista Matematica Iberoamericana, Vol. 11, **2**, 1995.

[6] IONESCU-TULCÉA C.T., MARINESCU G. *Théorie ergodique pour une classe d'opérations non complétement continues*
Annals of Math., T. 52, 1950, p. 140-147.

[7] KEANE M. *Strongly mixing g-measures*
Inventiones Math., t.16, 1972, p. 309-324.

[8] MALLAT S. *Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of* $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$
Trans. Amer. Math. Soc., t. 315, n^o 1, 1989, p. 69-88.

[9] NORMAN M.-F. *Markov processes and learning models*
Academic Press, 1972.